Dérivation et ses applications

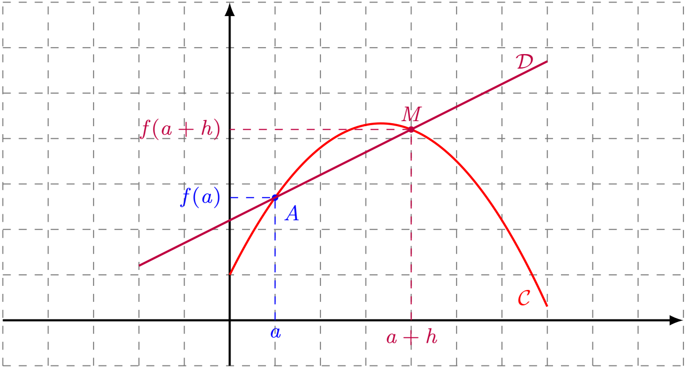
1re Spé Maths

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

I. Nombre dérivé

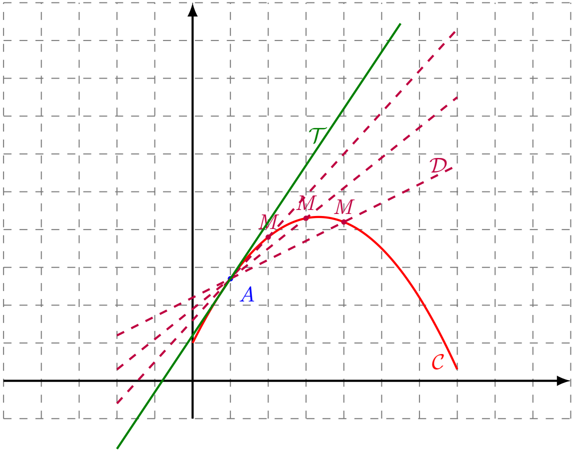
Considérons la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f, et un point $A(a; f(a))$.
Considérons ensuite un point $M\,(a+h; f(a+h))$ où $h \in \mathbb{R}$, et la droite $\mathcal{D}$ passant par A et M



$\mathcal{D}$ est appelée la **sécante** à $\mathcal{C}$ passant par A et M.
Le coefficient directeur de cette sécante est appelé le **taux d'accroissement** de f entre a et $a+h$; d'après la formule vue en classe de Seconde, il est égal à :

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Si M se rapproche de A, c'est-à-dire si h se rapproche de 0, alors la droite $\mathcal{D}$ se rapproche d'une droite $\mathcal{T}$ (en vert ci-dessous) qui « frôle » $\mathcal{C}$ et qui la touche au point A.



Ainsi, le taux d'accroissement de f entre a à $a+h$ se rapproche du coefficient directeur de $\mathcal{T}$. On dit que la *limite du taux d'accroissement quand h tend vers 0* est égal au coefficient directeur de $\mathcal{T}$, et on note :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \text{coefficient directeur de } \mathcal{T}.$$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit $a \in I$.
On définit le **nombre dérivé de f en a** comme étant le nombre noté $f'(a)$ tel que :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Exemple 1 : La fonction carré

Posons $f(x) = x^2$, et calculons le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, où a est un nombre quelconque et $h > 0$:

$$\begin{aligned}
\tau_a(h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\
&= \frac{\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{a^2}}{h} \\
&= \frac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}} \\
&= 2a + h.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} (2a+h) = 2a + 0 = 2a.$$

Quelle que soit la valeur de a, le nombre dérivé de x^2 en a est $f'(a) = 2a$.

Exemple 2 : La fonction cube

Posons $f(x) = x^3$, et calculons le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$, où a est un nombre quelconque et $h > 0$:

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

$$\begin{aligned}
\tau_a(h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\
&= \frac{\cancel{a^3} + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - \cancel{a^3}}{h} \\
&= \frac{\cancel{h}(3a^2 + 3ah + h^2)}{\cancel{h}} \\
&= 3a^2 + 3ah + h^2.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} (3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2.$$

Quelle que soit la valeur de a, le nombre dérivé de x^3 en a est $f'(a) = 3a^2$.

Exemple 3 : La fonction racine carrée

Posons $f(x) = \sqrt{x}$. f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\tau_a(h) &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \\
&= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{a+h}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\
&= \frac{a+h-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\
&= \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. Quelle que soit la valeur de a supérieure strictement à 0, le nombre dérivé de $\sqrt{x}$ en a est $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Exemple 4 : La fonction inverse

Posons $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned}
\tau_a(h) &= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\
&= \frac{\frac{a}{a(a+h)} - \frac{a+h}{a(a+h)}}{h} \\
&= \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} \\
&= -\frac{\cancel{h}}{a(a+h)} \times \frac{1}{\cancel{h}} \\
&= -\frac{1}{a(a+h)}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \left(-\frac{1}{a(a+h)} \right) = -\frac{1}{a^2}.$$

Quelle que soit la valeur de $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, le nombre dérivé de $\dfrac{1}{x}$ en a est $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.

II. Interprétations du nombre dérivé

En physique : Imaginons un corps en chute libre, lâché sans vitesse initiale. La distance qu'il parcourt en t secondes est égale à $d(t) = 5t^2$. Sa vitesse moyenne entre deux instants t_1 et t_2 est :

$$v = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_2}$$

car, $v = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$. On peut aussi noter : $v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$, « Δ » désignant ici la variation (et non le discriminant).

La **vitesse instantanée** est la vitesse à un instant donné. Ainsi, la vitesse instantanée à l'instant t peut être vue comme étant égale à $\lim_{h \to 0} \frac{d(t+h) - d(t)}{h}$, donc égale à $v'(t)$.

Le nombre dérivé peut donc être perçu comme une vitesse instantanée.

En économie : On définit le **coût marginal de production** comme le coût supplémentaire induit par la dernière unité produite. Si C représente le coût total, on note C_m le coût marginal associé. Le coût marginal sert à évaluer s'il est rentable d'accepter une commande supplémentaire. On peut alors exprimer le coût marginal par :

$$C_m(x) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{(x+h) - x} = \lim_{h \to 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}.$$

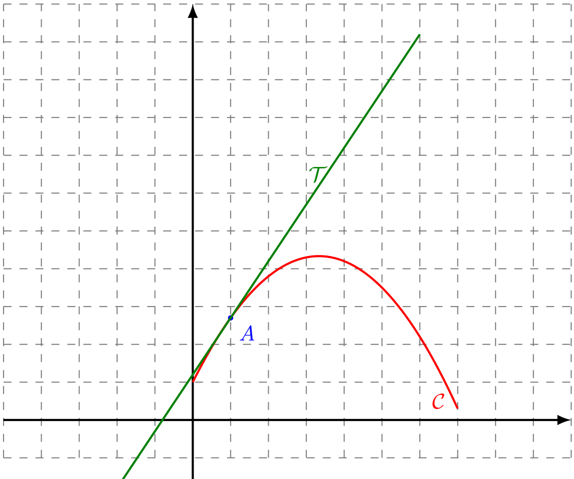
On s'aperçoit que le coût marginal n'est rien d'autre que le nombre dérivé du coût total.

III. Équation de la tangente

Définition

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur un intervalle I.
Soit $a \in I$.
On appelle **tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse** a la droite de coefficient directeur $f'(a)$ passant par le point de coordonnées $(a; f(a))$.

$\mathcal{T}$ est ici la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1



Propriété

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$.

L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Démonstration

Par définition, le coefficient de la tangente est $f'(a)$ donc l'équation réduite de la tangente est de la forme :

$$y = f'(a)x + p.$$

On sait de plus que le point de coordonnées $(a; f(a))$ est sur $\mathcal{C}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$f(a) = f'(a) \times a + p$$

donc :

$$p = f(a) - af'(a).$$

Ainsi, l'équation réduite de la tangente est :

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$$

soit, en factorisant une partie du second membre par $f'(a)$:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

IV. Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On définit la **fonction dérivée de** f comme étant la fonction :

$$f' \ : \ x \longmapsto f'(x)$$

où $f'(x)$ est le nombre dérivé de f en x.

Si $f'(x)$ est définie sur un intervalle J inclus dans I alors on dit que f est **dérivable sur** J.

Propriétés : Quelques dérivées usuelles

1. Si $f(x) = x^2$ alors $f'(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$.
2. Si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. Si $f(x) = \sqrt{x}$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$ (la fonction n'est pas dérivable en 0).
4. Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ alors $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
5. Si $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$.

Propriété

Soit la fonction $x \mapsto g(ax+b)$, où a et b sont deux nombres réels. Alors, sa fonction dérivée est :

$$x \longmapsto ag'(ax+b).$$

Exemples :

1. $f(x)=\sqrt{-5x+20}$, définie sur $]-\infty;4]$.
   Ici, $g(x)=\sqrt{x}$ et $f(x)=g(-5x+20)$.

   $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(x)=-5g'(-5x+20)$ soit :

   $$f'(x)=\frac{-5}{2\sqrt{-5x+20}},\ \text{définie sur }]-\infty;4[.$$

2. $f(x)=\dfrac{1}{4x+12}$, définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.
   Ici, $g(x)=\dfrac{1}{x}$ et $f(x)=g(4x+12)$.

   $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ donc $f'(x)=4g'(4x+12)$ soit :

   $$f'(x)=-\frac{4}{(4x+12)^2},\ \text{définie sur } \mathbb{R}\setminus\{-3\}.$$

V. Fonction valeur absolue

Définition

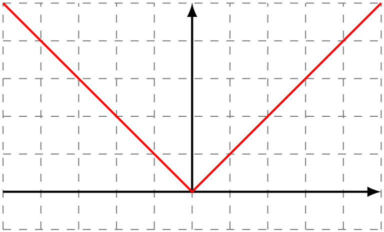
Pour tout réel x, on définit la **valeur absolue de $\boldsymbol{x}$**, et on note $|x|$, par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exemples

1. $|-5| = 5$ car $-5 < 0$.
2. $|3| = 3$ car $3 \geqslant 0$.
3. $|0| = 0$.
4. $|\pi| = \pi$ car $\pi \geqslant 0$.

Courbe représentative



Propriété

Soit $f(x) = |x|$. Alors,

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et $f'(0)$ n'existe pas.

Remarque

On dit que la fonction n'est pas dérivable en 0.

Démonstration

D'après la relation $(x^n)' = nx^{n-1}$, on sait que la dérivée de $x \mapsto x$ est $x \mapsto 1$, et celle de $x \mapsto -x$ est $x \mapsto -1$.

Or, si $x < 0$, $|x| = -x$ donc sur $]-\infty; 0[$, la dérivée de $x \mapsto |x|$ est celle de $x \mapsto -x$, c'est-à-dire $x \mapsto -1$.

De plus, si $x > 0$, $|x| = x$ donc sur $]0; +\infty[$, la dérivée de $x \mapsto |x|$ est celle de $x \mapsto x$, c'est-à-dire $x \mapsto 1$.

Le nombre dérivé de $x \mapsto |x|$ à gauche de 0 est donc égal à -1 alors que celui à droite de 0 vaut 1. Ainsi, en 0, il n'y a pas le même nombre dérivé à gauche et à droite :
$f'(0)$ n'existe donc pas.

VI. Opérations sur les dérivées

Propriétés : Formules usuelles

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

1. $(ku)' = ku'$
2. $(u+v)' = u' + v'$.
3. $(u-v)' = u' - v'$.
4. $(uv)' = u'v + uv'$.
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemples

- Produit d'un nombre et d'une fonction : $f(x) = 3x^2$. On pose alors $u(x) = x^2$ et $k = 3$. Comme $u'(x) = 2x$, on a :

$$f'(x) = 3 \times 2x = 6x.$$

- Somme : $f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 3x + 1$. Pour calculer $f'(x)$, on calcule la dérivée de chaque terme :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^3)' + (5x^2)' + (3x)' + (1)' \\ &= 4 \times 3x^2 + 5 \times 2x + 3 \times 1 + 0 \\ &= 12x^2 + 10x + 3. \end{aligned}$$

- Différence : $f(x) = 8x^5 - 5x^2$. Pour calculer $f'(x)$, on calcule la dérivée de chaque terme :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (8x^5)' - (5x^2)' \\ &= 8 \times 5x^4 - 5 \times 2x \\ &= 40x^4 - 10x. \end{aligned}$$

- Produit de deux fonctions : $f(x) = (3x+1)\sqrt{2x+5}$. On pose :

$u(x) = 3x + 1$	$v(x) = \sqrt{2x+5}$
$u'(x) = 3$	$v'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$

D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \times \sqrt{2x+5} + (3x+1) \times \frac{1}{\sqrt{2x+5}} \\ &= 3\sqrt{2x+5} + \frac{3x+1}{\sqrt{2x+5}} \\ &= \frac{3\sqrt{2x+5} \times \sqrt{2x+5} + (3x+1)}{\sqrt{2x+5}} \\ &= \frac{3(2x+5) + 3x + 1}{\sqrt{2x+5}} \\ &= \frac{9x+16}{\sqrt{2x+5}}. \end{aligned}$$

- Quotient de deux fonctions : $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x+3}$. On pose :

$$\begin{array}{l|l} u(x) = 3x^2 - 5x + 2 & v(x) = x + 3 \\ u'(x) = 6x - 5 & v'(x) = 1 \end{array}$$

D'où,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x-5)\times(x+3) - (3x^2 - 5x + 2)\times 1}{(x+3)^2} \\ &= \frac{6x^2 + 18x - 5x - 15 - 3x^2 + 5x - 2}{(x+3)^2} \\ &= \frac{3x^2 + 18x - 17}{(x+3)^2}. \end{aligned}$$

Remarque :

On ne développe pratiquement jamais le carré au dénominateur ; nous verrons que cela à une utilité dans le paragraphe « Applications de la dérivation ».

Démonstration

Calculons le taux d'accroissement de la fonction uv en a :

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}\\ &= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}\\ &= \frac{u(a+h)v(a)-u(a)v(a)-u(a+h)v(a)+u(a+h)v(a+h)}{h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{\big[u(a+h)-u(a)\big]v(a)+u(a+h)\big[v(a+h)-v(a)\big]}{h}\\ &= \frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a)+u(a+h)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\ .\end{aligned}$$

Or, $\lim_{h\to 0}\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)$, $\lim_{h\to 0}\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}=v'(a)$ et $\lim_{h\to 0}u(a+h)=u(a)$.

Ainsi,

$$\lim_{h\to 0}\tau_a(h)=u'(a)v(a)+u(a)v'(a).$$

Donc,

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

VI. Applications de la dérivation

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est strictement croissante sur $I \iff f'(x) > 0$ pour tout x de I.
- f est strictement décroissante sur $I \iff f'(x) < 0$ pour tout x de I.

Conséquence : Pour étudier les variations d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée.

Exemples

Soit $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x - 1$. Sa dérivée est : $f'(x) = 9x^2 - 10x + 4$. C'est un polynôme de degré 2, dont le discriminant est :
$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 9 \times 4 = -44 < 0$.
Ainsi, $f'(x)$ est du signe du coefficient de x^2, c'est-à-dire ici positif.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0 \text{ donc } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in I$.
On dit que f admet un **extremum local** en a si $f'(a) = 0$ et si, pour $h \neq 0$, $f'(a-h)$ et $f'(a+h)$ n'ont pas le même signe. Cet extremum local peut être :

- un **minimum** si $\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{pour } x < a \\ f'(x) > 0 & \text{pour } x > a \end{cases}$;
- un **maximum** si $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{pour } x < a \\ f'(x) < 0 & \text{pour } x > a \end{cases}$.

Exemples

Considérons la fonction $f(x) = -2x^3 - 20x^2 + x + 2$.
Sa dérivée est : $f'(x) = -6x^2 - 40x + 1$, dont le discriminant est :

$$\Delta = (-40)^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 1\,624 > 0.$$

$f'(x)$ admet donc deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-20 + \sqrt{406}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-20 - \sqrt{406}}{6}.$$

On déduit alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-20-\sqrt{406}}{6}$		$\frac{-20+\sqrt{406}}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	

$f(x_1)$: est un maximum local.
$f(x_2)$: est un minimum local.