Exercice 1 : (3 points)

Soit la fonction trinôme f suivante : $\text{f}(x) = 2x^2 + 12x + 53$.

$\boxed{1}$ **Méthode 1 :** Déterminons la forme canonique de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 12x + 53 \\ &= 2\left(x^2 + 6x + \frac{53}{2}\right) \\ &= 2\left(x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 - 3^2 + \frac{53}{2}\right) \\ &= 2\left((x+3)^2 + \frac{35}{2}\right) \\ &= 2(x+3)^2 + 35. \end{aligned}$$

Ainsi, l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

Méthode 2 : Dans ce cas, $a = 2$ et $b = 12$. Donc,

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2 \times 2} = -3 \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = 2 \times (-3)^2 + 12 \times (-3) + 53 = 35.$$

Ainsi, $2(x+3)^2 + 35$ est la forme canonique de f.

$\boxed{2}$ $a = 2$. a étant strictement supérieur à 0, la parabole représentant f est tournée vers le haut. Cette fonction admet alors un minimum dans $\mathbb{R}$. Ainsin le tableau de variations est donné par :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	↘	35	↗

$\boxed{3}$ D'après le tableau de variation de f, la parabole représentant f ne coupe pas l'axe des abscisses, car cette fonction est strictement positive. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 35$.

Exercice 2 : (3 points)

$\boxed{1}$ Le domaine de validité de l'équation $2x + 5\sqrt{x} - 3 = 0$, est $[0\ ;\ +\infty[$. En effet la fonction racine carrée est définie uniquement sur $\mathbb{R}^+$.
Posons, $X = \sqrt{x}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$2x + 5\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 + 5X - 3 = 0.(*)$$

Le discriminant de l'équation $(*)$ est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49$.
Δ étant strictement positif, cette équation admet deux solutions :

$$X_1 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{4} = -3 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{4} = \frac{1}{2}.$$

Par ailleurs, $X \geqslant 0$. Donc, seule X_2 est solution de l'équation (*). Autrement dit, $X_2 = \sqrt{x_2} = \dfrac{1}{2}$. Ce qui implique que $x_2 = \dfrac{1}{4}$. Ainsi, $S = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.

2 Résoudre de l'inéquation : $\dfrac{1-2x}{x^2-5x+4} \geqslant 0$.

Le discriminant du trinôme x^2-5x+4 est égal à : $\Delta = b^2-4ac = (-5)^2-4\times1\times4 = 9$.

Δ étant strictement positif, ce trinôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{9}}{2} = 1$ et $x_1 = \dfrac{5+\sqrt{9}}{2} = 4$.

Ce trinôme est du signe opposé de a entre les deux racines et du signe de a ailleurs. On déduit alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		4		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
x^2-5x+4		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\dfrac{1-2x}{x^2-5x+4}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	

Ainsi, $S = \left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{2}\right] \cup \left]1\ ;\ 4\right[$.

Exercice 3 : (4 points)

1 (a) D'une part, pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$:

$$\begin{aligned} x \geqslant 1 &\Leftrightarrow \sqrt{x} \geqslant \sqrt{1}, \quad \text{car la fonction racine carrée est croissante.}\\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}\times\sqrt{x} \geqslant \sqrt{x}\times\sqrt{1}, \quad \text{car la fonction racine carrée est positive.}\\ &\Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{x}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$:

$$\begin{aligned} x \geqslant 1 &\Leftrightarrow x\times x \geqslant 1\times x, \quad \text{car } x>0.\\ &\Leftrightarrow x^2 \geqslant x. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$: $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.

(b) Soit a un réel.

$$\begin{aligned} 1 \leq a \leq 2 &\Leftrightarrow 3 \leq 3a \leq 6\\ &\Leftrightarrow 3-1 \leq 3a \leq 6-1\\ &\Leftrightarrow 2 \leq 3a-1 \leq 5. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le résultat de la question précédente : $\sqrt{3a-1} \leq 3a-1 \leq (3a-1)^2$.

2 Soit f la fonction telle que : $f(x) = \sqrt{x^2-3x-4}$.

(a) Le discriminant du trinôme x^2-3x-4 est égal à : $\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\times1\times(-4) = 25$.

Δ étant >0, ce trinôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{25}}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{25}}{2} = 4$.

Ce trinôme est du signe opposé du coefficient principal a entre les deux racines et du signe de a ailleurs. Autrement dit,

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
x^2-3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, le domaine de définition de f est : $D_f = \left]-\infty\ ;\ -1\right] \cup \left[4\ ;\ +\infty\right[$.

b Étudions d'abord le sens de variations du trinôme : $x^2 - 3x - 4$.

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 4 &= x^2 - 2 \times x \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}. \end{aligned}$$

$a = 1$. a étant positif, la parabole représentant le trinôme $x^2 - 3x - 4$ est tournée vers le haut. Ainsi, le tableau de variation est donnée par :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x^2 - 3x - 4$		$\searrow$	$-\frac{25}{4}$	$\nearrow$	

Par ailleurs, on sait que les deux fonctions $x \longrightarrow x^2 - 3x - 4$ et $x \longrightarrow \sqrt{x^2 - 3x - 4}$, ont un même sens de variations. Par conséquent,

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$\sqrt{x^2 - 3x - 4}$		$\searrow$				$\nearrow$	

Exercice 4 : (3 points)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2.$$

1 $f(1) = 3 \times 1^3 + 2 \times 1^2 - 3 \times 1 - 2 = 3 + 2 - 3 - 2 = 0$. Ainsi, 1 est bel et bien une racine de f.

2 $$\begin{aligned} (x-1)(ax^2 + bx + c) &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) &\iff 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \\ &\iff \begin{cases} a &= 3 \\ b - a &= 2 \\ c - b &= -3 \\ -c &= -2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ c = 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

On déduit alors que :

$$f(x) = (x-1)(3x^2 + 5x + 2).$$

3 $f(1) = 0$ donc $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $x = 1$. On peut donc éliminer la courbe b.

De plus, le discriminant de $3x^2 + 5x + 2$ est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$.
Δ étant strictement positif, ce polynôme admet 2 racines distinctes, ce qui signifie que $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en 3 points distincts.
Ainsi, la courbe a est celle qui représente la fonction f.

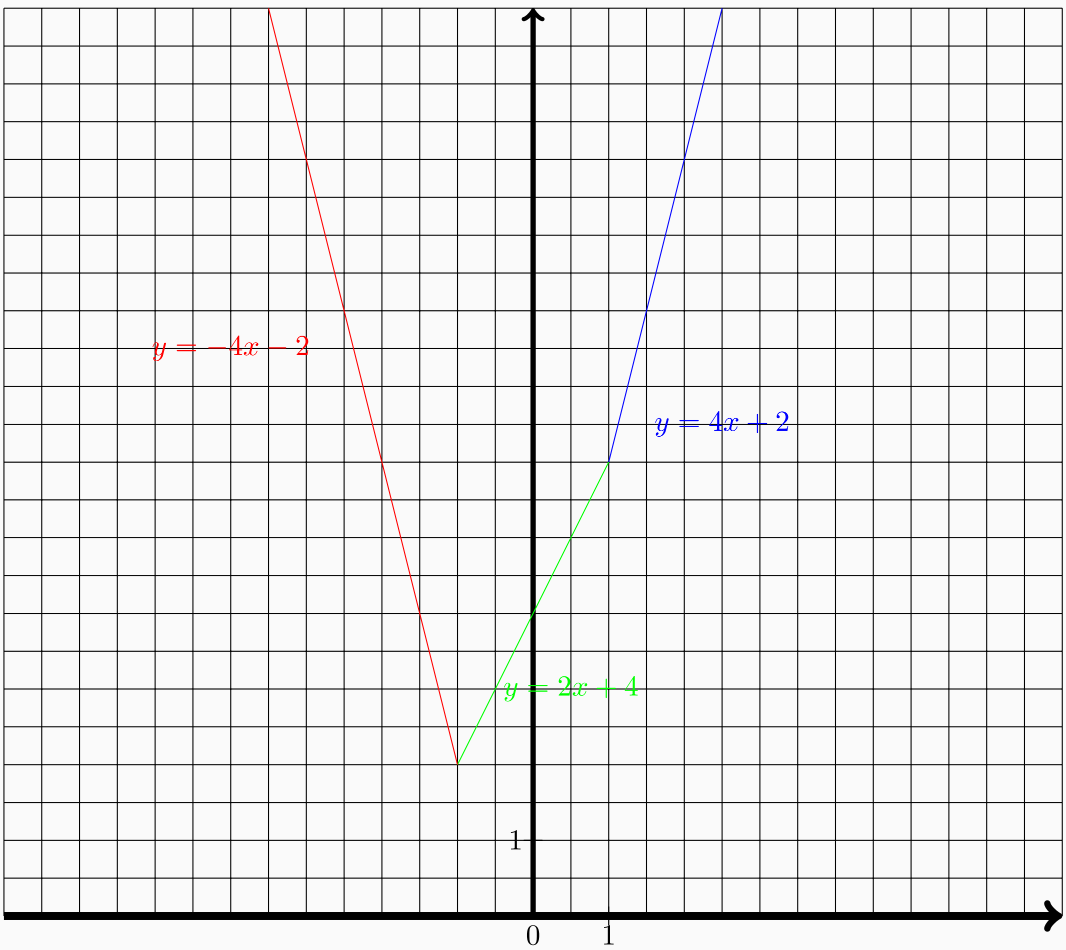
Exercice 5 : (3 points)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lvert x-1 \rvert + 3\lvert x+1 \rvert$.

1 L 'expression de f sans valeur absolue, est déclinée dans le tableau ci-après :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\lvert x-1 \rvert$		-x+1		-x+1	0	x-1	
$\lvert x+1 \rvert$		-x-1	0	x+1		x+1	
$3\lvert x+1 \rvert$		-3x-3	0	3x+3		3x+3	
$f(x)$		-4x-2		2x+4		4x+2	

2 Ci-après la représentation graphique de la fonction f.



3 D'après la question précédente : $S =]-\infty\ ;\ -1[\cup]-1\ ;\ +\infty[$.

Exercice 6 : (4 points)

On considère les droites (d_1), (d_2) et (d_3) d'équation respective :

— $(d_1) : 2x + y + 4 = 0$;
— $(d_2) : -x + 2y - 5 = 0$;
— $(d_3) : 3x - y + 9 = 0$.

1 On sait que :
$\vec{u}\binom{-1}{2}$ est un vecteur directeur de la droite (d_1).
$\vec{u}\binom{-2}{-1}$ est un vecteur directeur de la droite (d_2).
Par ailleurs, $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \times (-1) - 2 \times (-2) = 5 \neq 0$. Donc, (d_1) et (d_2) sont bel et bien sécantes.

2 Pour déterminer les coordonnées de A, point d'intersection de (d_1) et (d_2), il suffit de résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ -x + 2y - 5 = 0 \end{cases} .$$

Calculons d'abord x, en utilisant à titre d'exemple la combinaison linéaire $2L_1 - L_2$. En effet,

$$\begin{array}{l} 2L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} 4x + 2y + 8 = 0 \\ -x + 2y - 5 = 0 \end{cases} .$$

Par soustraction, on obtient : $5x + 13 = 0$. Soit, $x = -\dfrac{13}{5}$.
Calculons à présent y, en utilisant à titre d'exemple la combinaison linéaire $L_1 + 2L_2$. En effet,

$$\begin{array}{l} L_1 \\ 2L_2 \end{array} \begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ -2x + 4y - 10 = 0 \end{cases} .$$

Par addition, on obtient : $5y - 6 = 0$. Soit, $y = \dfrac{6}{5}$.
Par conséquent, $S = \left\{ \left(-\dfrac{13}{5} \, ; \, \dfrac{6}{5} \right) \right\}$. Autrement dit, $\left(-\dfrac{13}{5} \, ; \, \dfrac{6}{5} \right)$ sont les coordonnées du point d'intersection I, des deux droites (d_1) et (d_2).

3 On remarque que : $3 \times \dfrac{-13}{5} - \dfrac{6}{5} + 9 = \dfrac{-39}{5} - \dfrac{6}{5} + 9 = \dfrac{-45}{5} + 9 = 0$. Ce qui revient à dire que $I \in (d_3)$.
Par conséquent, (d_1), (d_2) et (d_3) sont concourantes.

Exercice 7 : (2 points - bonus)

Soit a un réel donné. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer le taux d'accroissement en a, puis déterminer si f est dérivable en a. Lorsque c'est le cas, donner $f'(a)$.

1 Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en a est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{m(a+h) + p - (ma + p)}{h} \\ &= \frac{ma + mh + p - ma - p}{h} \\ &= \frac{mh}{h} \\ &= m. \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = m$. Donc f est dérivable en a et $f'(a) = m$.

$\boxed{\textbf{2}}$ Soit $h \neq 0$. Le taux d'accroissement de f en 4 est donné par :

$$\begin{aligned}
\frac{f(4+h)-f(4)}{h} &= \frac{2\sqrt{4+h}-1-3}{h} \\
&= \frac{2\sqrt{4+h}-4}{h} \\
&= \frac{2(\sqrt{4+h}-2)}{h} \times \frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2} \\
&= \frac{2(\sqrt{4+h}^2-2^2}{h(\sqrt{4+h}+2)} \\
&= \frac{2h}{h(\sqrt{4+h}+2)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{4+h}+2}.
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(4+h)-f(4)}{h} = \dfrac{1}{2}$. Donc, f est dérivable en 4 et $f'(4) = \dfrac{1}{2}$.