Devoir Surveillé n° 3

Corrigé - 30 minutes

Question 1 : (1 point)

Soit x un réel.

$$\begin{aligned}
\text{Les deux vecteurs } \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ -\sqrt{2}\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} 4x \\ x-4\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} &\Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 4x \\ -\sqrt{2} & x-4 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow x(x-4) - (-\sqrt{2}) \times 4x = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4\sqrt{2}x = 0 \\
&\Leftrightarrow x(x - 4 + 4\sqrt{2}) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4 - 4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, les deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{-\sqrt{2}}$ et $\vec{v}\binom{4x}{x-4}$ sont colinéaires lorsque $x = 0$ ou $x = 4 - 4\sqrt{2}$.

Question 2 : (1 point)

Dans un repère orthonormé, on considère les points $C\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On détermine à titre d'exemple les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$. Nous avons alors :

$\overrightarrow{CD}\binom{x_D - x_C}{y_D - y_C} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\binom{2-(-3)}{-1-(-2)} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\binom{5}{1}$ et $\overrightarrow{CE}\binom{x_E - x_C}{y_E - y_C} \Leftrightarrow \overrightarrow{CE}\binom{6-(-3)}{1-(-2)} \Leftrightarrow \overrightarrow{CE}\binom{9}{3}$.

Or, $\det(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}) = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 1 \times 9 = 6 \neq 0$. Donc, les points E, D et C ne sont pas alignés.

Question 3 : (1 point)

$\vec{u}\binom{4}{-2}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $-2x - 4y + 3 = 0$.
$\vec{v}\binom{5}{2}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $2x - 5y - 1 = 0$.
Or, $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - (-2) \times 5 = 18 \neq 0$. Donc, ces deux droites ne sont pas parallèles.

Question 4 : (1 point)

Soit $M\binom{x}{y} \in (d)$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
\text{Les deux vecteurs } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-1\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\vec{v}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -1 \\ y-1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow 2x - (-1) \times (y-1) \\
&\Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $2x + y - 1 = 0$ est une équation cartésienne de (d).

Question 5 : (1 point)

L'équation réduite est donnée sous la forme : $y = mx + p$.
Calculons le coefficient directeur m :
$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-\frac{1}{2} - (-1)}{-2 - \frac{5}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{-\frac{9}{2}} = \dfrac{3}{-9} = -\dfrac{1}{3}$.
Calculons à présent l'ordonnée à l'origine p :
$A\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \in (d)$, donc $-1 = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{2} + p$. Dès lors, $p = -1 + \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{6}$.
Par conséquent, $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{6}$ est l'équation réduite de la droite (AB).

Question 6 : (1 point)

$\overrightarrow{u}\binom{-1}{-1}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $-x + y = 3$.

Le point $A\binom{-1}{4} \in (d)$. En effet, $-1 + 4 = 3$.

Question 7 : (1 point)

On considère la droite (d) d'équation cartésienne $-2x + 3y - 4 = 0$.
Lorsque la droite (d) coupe l'axe des abscisses $y = 0$. Ainsi, $-2x - 4 = 0$, autrement dit, $x = -\dfrac{4}{2} = -2$.
Par conséquent, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du point d'intersection de (d) avec l'axe des abscisses.

Question 8 : (1 point)

On considère la droite (d) d'équation $x - 4y - 5 = 0$.
$\begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix} \in (d)$. Donc, $5 - 4y - 5 = 0$. Ce qui implique que $y = 0$.
Par conséquent, $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du point E d'abscisse 5 appartenant à la droite (d).

Question 9 : (1 point)

On considère un paramètre réel m. Soit (d) la droite d'équation $2x - 5y + 2 = 0$.

$$\begin{aligned}
A\begin{pmatrix} 2m \\ 2m+1 \end{pmatrix} \in (d) &\Leftrightarrow 2 \times 2m - 5(2m+1) + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 4m - 10m - 5 + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow -6m - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow -6m = 3 \\
&\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $A \in (d)$ lorsque $m = -\dfrac{1}{2}$

Question 10 : (1 point)

L'équation réduite de (d_1) est donnée par l'expression : $y = mx + p$. Or, $m = -1$ donc $y = -x + p$.
Par ailleurs, $A\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in (d_1)$, ainsi, $4 = -0 + p = p$.
Par conséquent, $y = -x + 4$ est l'équation réduite de (d_1).