1re Spé — maths-mde.fr

Devoir Surveillé n° 2

...../20 - 1 heure

Lycée Evariste Galois

Exercice 1 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x - 27$.

1 Déterminons la forme canonique de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x - 27 \\ &= x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 - 3^2 - 27 \\ &= (x-3)^2 - 9 - 27 \\ &= (x-3)^2 - 36. \end{aligned}$$

2 Déterminons la forme factorisée de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-3)^2 - 36 \\ &= (x-3)^2 - 6^2 \\ &= (x-3-6)(x-3+6) \\ &= (x-9)(x+3). \end{aligned}$$

3 (a) Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, le mieux est d'utiliser la forme factorisée.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-9)(x+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 9 = 0 \text{ ou } x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 9 \text{ ou } x = -3. \end{aligned}$$

Ainsi, $S = \{-3\ ;\ 9\}$.

(b) Pour résoudre l'équation $f(x) = -27$, le mieux est d'utiliser la forme développée et réduite.

$$\begin{aligned} f(x) = -27 &\Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 = -27 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-6) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 6. \end{aligned}$$

Ainsi, $S = \{0\ ;\ 6\}$.

(c) Pour résoudre l'équation $f(x) = -36$, le mieux est d'utiliser la forme canonique.

$$\begin{aligned} f(x) = -36 &\Leftrightarrow (x-3)^2 - 36 = -36 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

Ainsi, $S = \{3\}$.

4 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

(a) $g(1) = 2 \times 1^2 - \dfrac{3}{2} \times 1 - 1 = 2 - \dfrac{4}{2} = 0$.
Ainsi, 1 est bel et bien une racine de g.

(b) On sait que : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$.
Or, $x_1 = 1$. Donc, $x_2 = \dfrac{3}{4} - 1 = -\dfrac{1}{4}$.

5 Résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$, revient à résoudre l'inéquation $x^2 - 6x - 27 < 2x^2 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.
Autrement dit, $x^2 + \dfrac{9}{2}x + \dfrac{53}{2} > 0$.

Le discriminant du trinôme (*) $x^2 + \dfrac{9}{2}x + \dfrac{53}{2}$ est égal à :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times \frac{53}{2} \\ &= \frac{81}{4} - 106 \\ &= -\frac{343}{4}.\end{aligned}$$

Δ étant inférieur strictement à 0, le trinôme (*) n'admet pas racine. Par ailleurs, $a = 1$, donc la parabole représentant ce trinôme est tournée vers le haut et ne coupe pas l'axe des abscisses.

Par conséquent, $S = \mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + \dfrac{9}{2}x + \dfrac{53}{2} > 0$ ce qui revient à dire pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < g(x)$.

Exercice 2 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 9x + 4$.

1 Pour dresser le tableau de variations de la fonction f, il suffit de déterminer les paramètres a, α et β de la forme canonique.
Dans notre cas, $a = 5$ et $b = -9$. Ainsi,
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{9}{10}$ et $\beta = f\left(\dfrac{9}{10}\right) = 5 \times \left(\dfrac{9}{10}\right)^2 - 9 \times \dfrac{9}{10} + 4 = -\dfrac{-1}{20}$.
Par ailleurs, $a = 5$. a étant positif, la parabole représentant f est tournée vers le haut. On déduit alors le tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{9}{10}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{20}$	$\nearrow$

2 Le discriminant du polynôme du second degré Résoudre l'équation $f(x)$ est égal à :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-9)^2 - 4 \times 5 \times 4 \\ &= 81 - 80 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Δ étant supérieur strictement à 0, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{9-1}{2 \times 5} = \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{9+1}{2 \times 5} = 1.$$

Ainsi, $S = \left\{\dfrac{4}{5}\ ;\ 1\right\}$.

3 La forme factorisée de f est donnée par :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 5\left(x - \frac{4}{5}\right)(x - 1).$$

4 Le tableau de signes de $f(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{4}{5}$		1		$+\infty$
$x - \frac{4}{5}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\left(x - \frac{4}{5}\right)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 3 : (5 points)

Une entreprise fabrique chaque jour x objets avec $x \in [0;60]$. Le coût total de production de ces objets, exprimés en euros, est donné par : $C(x) = x^2 - 20x + 200$.

1 Calculer le nombre d'objets fabriqués correspondant à un coût de 500 euros revient à résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} C(x) = 500 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 20x + 200 = 500 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 20x - 300 = 0. \quad (**) \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation (**) est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac = 400 + 1\ 200 = 1\ 600$.
Δ étant positif, l'équation possède 2 solutions réelles :
$x_1 = \dfrac{20 - \sqrt{1\ 600}}{2} = -10$ et $x_2 = \dfrac{20 + \sqrt{1\ 600}}{2} = 30$.
On ne peut garder que la solution positive. Un coût de 500 euros correspond donc à la fabrication de 30 objets.

2 Chaque objet fabriqué est vendu au prix unitaire de 34 euros. Ainsi, $R(x) = 34x$.

3 Pour tout $x \in [0\ ;\ 60]$, on a :

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 34x - x^2 + 20x - 200 \\ &= -x^2 + 54x - 200. \end{aligned}$$

4 Dans notre cas, $a = -1$ et $b = 54$. Ainsi, $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 27$ et $\beta = B(27) = 529$.
a étant négatif, la parabole représentant B est orientée vers le bas. On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		27		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	529	$\searrow$	

5 Le bénéfice est donc maximal quand l'entreprise fabrique 27 objets. Le bénéfice s'élève alors à 529 euros.

Exercice 4 : (2 points)

On considère l'équation (E) : $\quad (m+8)x^2 + mx + 1 = 0$.
Cette équation admet une unique solution lorsque le discriminant est nul. Autrement dit,

$$\begin{aligned}\Delta = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad b^2 - 4ac = 0\\ &\Leftrightarrow \quad m^2 - 4 \times (m+8) \times 1 = 0\\ &\Leftrightarrow \quad m^2 - 4m - 32 = 0. \quad (*)\end{aligned}$$

Pour obtenir les valeurs de m, il faut à nouveau calculer le discriminant de l'équation $(*)$ cette fois-ci, on obtient alors : $\Delta' = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-32) = 16 + 128 = 144$.
Δ' étant positif, l'équation $(*)$ admet deux solutions :

$$m_1 = \frac{4+12}{2} = 8 \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{4-12}{2} = -4.$$

Par conséquent, l'équation (E) admet une racine double lorsque $m = -4$ ou $m = 8$.

Exercice 5 : (2 points)

Dans cet exercice, on va s'intéresser aux équations dites bi-carrées qui sont de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$.
On propose alors de résoudre l'équation (E) : $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.

1 En remplaçant x^2 par X dans l'équation (E), on obtient : $X^2 - 6X + 8 = 0$.

2 Le discriminant de l'équation $X^2 - 6X + 8 = 0$, est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 4$.
Δ étant positif, cette équation admet deux solutions :

$$X_1 = \frac{6+2}{2} = 4 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{6-2}{2} = 2.$$

3 Étant donné que : $X_1 = x_1^2 = 4$ et $X_2 = x_2^2 = 2$. On peut déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) : $x_1 = 2$ ou $x_1 = -2$ et $x_2 = \sqrt{2}$ ou $x_2 = -\sqrt{2}$.
Par conséquent : $S = \left\{-2 \ ; \ -\sqrt{2} \ ; \ \sqrt{2} \ ; \ 2\right\}$.