1re Spé — maths-mde.fr

Devoir Surveillé n° 1

Corrigé - 30 minutes

Lycée Evariste Galois

Question 1 : (1 point)

$$\begin{aligned}
4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-1 &= 4\left(x^2-2\times x\times\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)-1\\
&= 4\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-1\\
&= 4x^2-12x+9-1\\
&= 4x^2-12x+8.
\end{aligned}$$

Question 2 : (1 point)

$$\begin{aligned}
3\left((x-2)^2-4\right) &= 3\left((x-2)^2-2^2\right)\\
&= 3\left((x-2-2)(x-2+2)\right)\\
&= 3x(x-4).
\end{aligned}$$

Question 3 : (1 point)

<u>Méthode 1 :</u> Déterminons la forme canonique du trinôme :

$$\begin{aligned}
3x^2-4x-1 &= 3\left(x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)\\
&= 3\left(x^2-2\times\frac{2}{3}\times x+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\right)\\
&= 3\left(\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\right)\\
&= 3\left(\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{9}\right)\\
&= 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, $a=3$; $\alpha=\dfrac{2}{3}$ et $\beta=-\dfrac{7}{3}$.

<u>Méthode 2 :</u> Posons $P(x)=3x^2-4x-1$. Dans ce cas, $a=3$ et $b=-4$. Ainsi, $\alpha=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-4)}{2\times 3}=\dfrac{2}{3}$ et

$$\begin{aligned}
\beta &= P\left(\frac{2}{3}\right)\\
&= 3\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\times\frac{2}{3}-1\\
&= \frac{4}{3}-\frac{8}{3}-1\\
&= -\frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $P(x)=3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{7}{3}$.

Question 4 : (1 point)

Méthode 1 : Déterminons la forme canonique de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2+4x-1 \\ &= -\left(x^2-4x+1\right) \\ &= -\left(x^2-2\times x\times 2+2^2-2^2+1\right) \\ &= -\left((x-2)^2-4+1\right) \\ &= -\left((x-2)^2-3\right) \\ &= -(x-2)^2+3. \end{aligned}$$

Ainsi, $S\,(2\ ;\ 3)$ est le sommet de la parabole représentant f.

Méthode 2 : Dans ce cas, $a=-1$ et $b=4$. Ainsi, $\alpha=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-4}{2\times(-1)}=2$ et $\beta=f(2)=-2^2+4\times 2-1=-4+8-1=3$.
Ainsi, $S\,(2\ ;\ 3)$ est le sommet de la parabole représentant f.

Question 5 : (1 point)

Méthode 1 : Déterminons la forme canonique de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-3x+11 \\ &= x^2-2\times x\times\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+11 \\ &= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+11 \\ &= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{35}{4}. \end{aligned}$$

$a=1$. a étant positif, la parabole représentant f est tournée vers le haut. f admet alors un minimum. Ce minimum est atteint lorsque $x=\dfrac{3}{2}$.

Méthode 2 : Dans ce cas, $a=1$ et $b=3$. Ainsi, $\alpha=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-3}{2\times 1}=\dfrac{3}{2}$.
$a=1$. a étant positif, la parabole représentant f est tournée vers le haut. f admet alors un minimum. Ce minimum est atteint lorsque $x=\dfrac{3}{2}$.

Question 6 : (1 point)

Méthode 1 : Déterminons la forme canonique de P :

$$\begin{aligned} P(x) &= -2x^2+\frac{x}{3} \\ &= -2\left(x^2-\frac{x}{6}\right) \\ &= -2\left(x^2-2\times x\times\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{12}\right)^2-\left(\frac{1}{12}\right)^2\right) \\ &= -2\left(\left(x-\frac{1}{12}\right)^2-\frac{1}{144}\right) \\ &= -2\left(x-\frac{1}{12}\right)^2+\frac{1}{72}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = \dfrac{1}{12}$.

Méthode 2 : Dans ce cas, $a = -2$ et $b = \dfrac{1}{3}$. Ainsi, $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-\frac{1}{3}}{2 \times (-2)} = \dfrac{1}{12}$.

Ainsi, l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = \dfrac{1}{12}$.

Question 7 : (1 point)

Déterminons la forme canonique de P :

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & -x^2 - x + 3 \\ & = & -\left(x^2 + x - 3\right) \\ & = & -\left(x^2 + 2 \times x \times \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 3\right) \\ & = & -\left(\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} - 3\right) \\ & = & -\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{13}{4}. \end{array}$$

$a = -1$. a étant négatif, la parabole représentant P est orientée vers le bas. P admet alors une valeur maximale.
Ainsi, le tableau de variations de P est donné par :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$P(x)$	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$

Question 8 : (1 point)

Déterminons la forme canonique de P :

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & \dfrac{1}{4}x^2 + \lambda x - 2 \\ & = & \dfrac{1}{4}\left(x^2 + 4\lambda x - 8\right) \\ & = & \dfrac{1}{4}\left(x^2 + 2 \times 2\lambda \times x + (2\lambda)^2 - (2\lambda)^2 - 8\right) \\ & = & \dfrac{1}{4}\left((x + 2\lambda)^2 - 4\lambda^2 - 8\right) \\ & = & \dfrac{1}{4}\left(x + 2\lambda\right)^2 - \lambda^2 - 2. \end{array}$$

Dans ce cas, $a = \dfrac{1}{4}$, $\alpha = -2\lambda$ et $\beta = -\lambda^2 - 2$.

Question 9 : (1 point)

Le discriminant du trinôme $\frac{1}{4}x^2 - 4x + 16$ est égal à :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-4)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times 16 \\ &= 16 - 16 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Δ étant nul, ce trinôme admet une racine :

$$\begin{aligned}x &= -\frac{b}{2a} \\ &= \frac{-(-4)}{2 \times \frac{1}{4}} \\ &= 8.\end{aligned}$$

Ainsi, $S = \{8\}$.

Question 10 : (1 point)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $f(x) = (x-1)^2 - 1$.
$a = 1$. a étant strictement positif, la parabole représentant f est orientée vers le haut. Le point $S\,(1\ ;\ -1)$ est le sommet de cette parabole.
Ainsi, c'est la courbe $\mathcal{C}_2$ qui représente la fonction f.