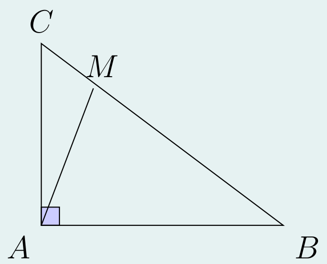
Devoir Maison n°1

Exercice 1 : (5 points)

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 4$ et $AC = 3$. On cherche la position du point M sur le segment $[BC]$ telle que la distance AM soit minimale.



1. (a) Posons : $\overrightarrow{i} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{j} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
   $(A, \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$ est le repère orthonormé $\mathscr{R}$ dans lequel les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(0\,; 0)$, $(4\,; 0)$ et $(0\,; 3)$.

   (b) $\overrightarrow{BC}\binom{-4}{3}$ est un vecteur directeur de la droite (BC).
   Soit $N\binom{x}{y} \in (BC)$. Les deux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CN}$ sont colinéaires, ainsi :
   $\det(\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{BC}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -4 \\ y-3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x + 4(y-3) = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{3}{4}x + 3$.

   (c) $M\binom{x_B}{y_B} \in (BC)$, donc $y_M = -\dfrac{3}{4}x_M + 3$.

2. Soit f la fonction qui à l'abscisse x de M dans ce repère associe la distance AM^2 pour $x \in [0\ ;\ 4]$.

   (a) Il s'agit de la forme canonique :

$$\begin{aligned}
f(x) &= AM^2 \\
&= (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 \\
&= x^2 + \left(-\frac{3}{4}x + 3\right)^2 \\
&= x^2 + \frac{9}{16}x^2 - 2 \times \frac{3}{4}x \times 3 + 3^2 \\
&= \frac{25}{16}x^2 - \frac{9}{2}x + 9 \\
&= \frac{25}{16}\left(x^2 - \frac{72}{25}x + \frac{144}{25}\right) \\
&= \frac{25}{16}\left[\left(x^2 - \frac{36}{25}\right)^2 - \left(\frac{36}{25}\right)^2 + \frac{144}{25}\right) \\
&= \frac{25}{16}\left[\left(x^2 - \frac{36}{25}\right)^2 + \frac{2304}{625}\right] \\
&= \frac{25}{16}\left(x - \frac{36}{25}\right)^2 + \frac{144}{25}.
\end{aligned}$$

   (b) $\dfrac{144}{25}$ est le minimum de f sur $[0\ ;\ 4]$. On déduit alors que $AM = \dfrac{12}{5}$.

Exercice 2 : (2 points)

L'objectif est de résoudre l'équation suivante : $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=1$.

1. 1 et -1 sont deux valeurs interdites. Ainsi, le domaine de validité de cette équation est $D =]-\infty\ ;\ -1[\cup]-1\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.
2. Pour tout $x \in D$,
$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1(x+1)+1(x-1)}{(x-1)(x+1)}=1\\ &\Leftrightarrow \quad (x+1)+(x-1)=(x-1)(x+1). \quad (E)\end{aligned}$$
3. Pour tout $x \in D$,
$$\begin{aligned}(x+1)+(x-1)=(x-1)(x+1) \quad &\Leftrightarrow \quad 2x=x^2-1\\ &\Leftrightarrow \quad x^2-2x-1=0 \quad (*)\end{aligned}$$
Le discriminant de l'équation (*) est égal à : $\Delta = b^2-4ac=(-2)^2-4\times 1\times(-1)=8$.
Δ étant positif, cette équation admet deux solutions :
$x_1=\dfrac{2-\sqrt{8}}{2}=1-\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{2+\sqrt{8}}{2}=1+\sqrt{2}$.
Ainsi, $S=\left\{1-\sqrt{2}\ ;\ 1+\sqrt{2}\right\}$.

Exercice 3 : (3 points)

1. Quand la balle est située à 5 m du joueur de tennis, sa hauteur s'élève à $1,5$ m. En effet, $y=-0,03\times 5^2+0,3\times 5+0,75=1,5$. La balle passe alors au-dessus du filet.
2. Pour déterminer à quelle distance du joueur la balle est retombée par terre, il suffit de résoudre l'équation $-0,03x^2+0,3x+0,75=0$. (E).
Le discriminant de cette équation est égal à : $\Delta=b^2-4ac=0,3^2-4\times(-0,03)\times 0,75=0,18$.
Δ étant positif, l'équation admet deux solution :
$x_1=\dfrac{-0,3-\sqrt{0,18}}{-0,06}=\dfrac{-0,3-0,3\sqrt{2}}{-0,06}=5+5\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{-0,3+\sqrt{0,18}}{-0,06}=5-5\sqrt{2}$.
Or, x_2 est négative, donc seule la valeur de x_1 est plausible, qui vaut environ 12,1 m.
3. Déterminer à quelle(s) distance(s) du joueur la balle atteint une hauteur supérieure ou égale à 1,02 m, revient à résoudre l'inéquation $-0,03x^2+0,3x+0,75>1,02$, autrement dit, $-0,03x^2+0,3x-0,27>0$.
Le discriminant de trinôme $-0,03x^2+0,3x-0,27$ est égal à : $\Delta=b^2-4ac=(0,3)^2-4\times(-0,03)\times(-0,27)=0,0576$.
Δ étant positif, ce trinôme admet deux racines :
$x_1=\dfrac{-0,3-\sqrt{0,0576}}{-0,06}=9$ et $x_1=\dfrac{-0,3-\sqrt{0,0576}}{-0,06}=1$.
Par ailleurs, le coefficient principal du trinôme est négatif, donc son signe est positif entre les deux racines 1 et 9 et négatif ailleurs.
Par conséquent, la hauteur est supérieure à 1,02 lorsque $x\in[1\ ;\ 9]$.