Méthode de Newton

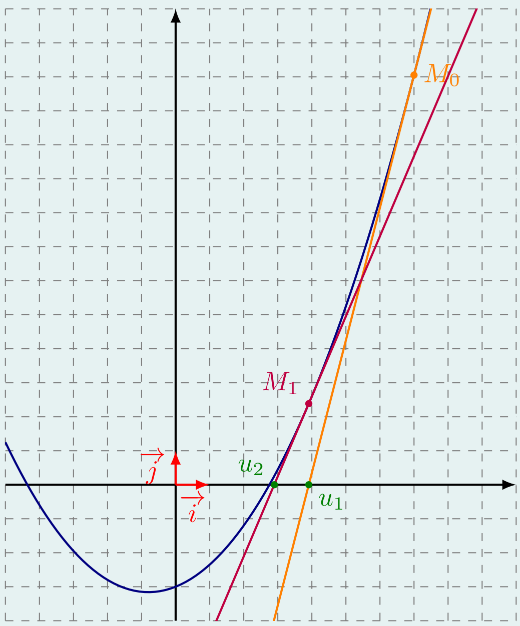
Objectif

Utiliser la méthode de Newton pour obtenir une valeur approchée d'une solution à une équation du type $f(x) = 0$.

Partie 1 : GeoGebra

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,25x^2 + 0,4x - 3$. On appelle C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+$.

1. Tracer la courbe de la fonction g sur GeoGebra puis conjecturer à quel intervalle d'amplitude 0,5 appartient α : ....
2. Placer le point M_0 d'abscisse $u_0 = 7$ sur cette courbe C_f et tracer la tangente à la courbe en ce point. Cette tangente coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse u_1.
3. Placer le point M_1 de coordonnées $(u_1; f(u_1))$, puis tracer la tangente à la courbe en M_1, cette dernière coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse u_2, comme l'illustre la figure ci-contre.
4. En continuant ainsi de façon analogue, que peut-on dire concernant les nombres u_1, u_2, u_3, ... ? ....
....
....
....
....



.

Partie 2 : Algorithme

1. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à C_f au point M_0 d'abscisse u_0. ....
....
....
2. Soit $A_1(u_1; 0)$ le point d'intersection de la tangente $\mathcal{T}_0$ avec l'axe des abscisses. Démontrer que : $u_1 = u_0 - \dfrac{f(u_0)}{f'(u_0)}$.
....
....
....
....
3. De la même façon, donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}_1$ à C_f au point M_1 d'abscisse u_1. ....
....
....
4. Soit $A_2(u_2; 0)$ le point d'intersection de la tangente $\mathcal{T}_1$ avec l'axe des abscisses. Démontrer que : $u_2 = u_1 - \dfrac{f(u_1)}{f'(u_1)}$.
....
....
....
....
5. Supposons connu l'abscisse a_n du point $M_n(a_n; f(a_n))$. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}_n$ à C_f au point M_n
....
....
6. Soit $A_{n+1}(u_{n+1}; 0)$ le point d'intersection de la tangente $\mathcal{T}_n$ avec l'axe des abscisses.
Démontrer que : $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.
....
....
....
....
....
....

Partie 3 : Python

Nous avons désormais une égalité qui permet de calculer u_{n+1} à partir de u_n. Nous pouvons donc écrire un algorithme qui calcule une série de valeurs à partir de la simple valeur de u_0 correspondant à l'abscisse du point M_0.

```
a prend la valeur 7 (abscisse de M0)
Pour i allant de 1 à 10:
    a prend la valeur a-f(a)/f'(a)
Fin du Pour
Afficher a
```

1. Compléter le programme suivant :

```python
def f(x):
    return .....................

def g(x):
    return .....................

a = 7
for i in range(10):
    a = .....................
print('a = ',a)
```

2. Donner la valeur approchée obtenu par le susdit programme sous python ....