6

Fonctions polynômes de degré 3

Série d'exercices

Corrigés **Classe : 1re STMG** **Lycée : Evariste Galois**

Exercice n°1

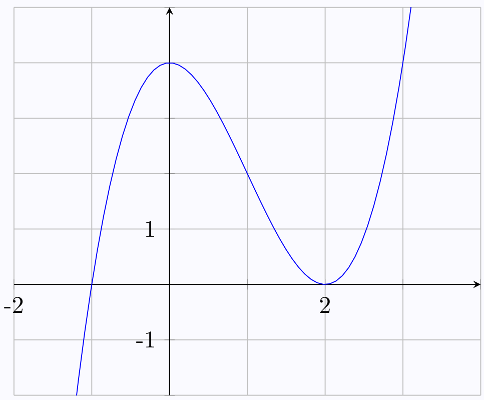
Justifier que les fonctions suivantes sont des fonctions polynômes du troisième degré.

1. $f(x) = 4x^3 - 2x + 3$.
2. $g(x) = -3(x+7)(x-2)(x-1)$.
3. $h(x) = 2(x-7)(x-1)^2$.

Exercice n°2

On considère la fonction polynôme de degré 3 définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4.$.

1. (a) Montrer que 2 et -1) sont deux racines de f.
   (b) Que peut-on en déduire graphiquement ?
2. On a tracé ci-dessous la courbe représentant f.



   (a) Résoudre graphiquement l'équation

$$f(x) = 4.$$

   (b) Résoudre graphiquement l'inéquation

$$f(x) < 0.$$

Exercice n°3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^3 + 1.$$

1. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Sans faire aucun calcul, comparer les nombres :
   a) $f(0,6)$ et $f(0,7)$ **b)** $f(-4)$ et $f(-2)$.

Exercice n°4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

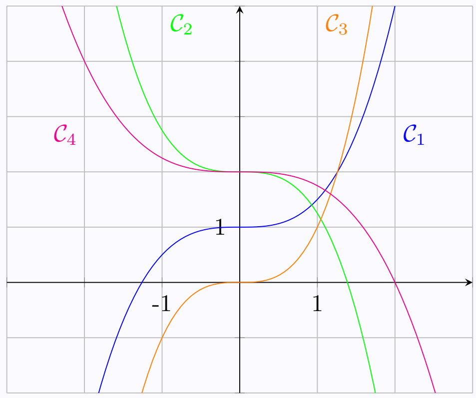
a) $x^3 = 1\ 000$.
b) $x^3 = 64$.
c) $2x^3 + 11 = 5$.
d) $x^3 - 4 = 0$.
e) $2x^3 = x^3 + 1$.
f) $x^3 + 3x^2 = 3x^2 - 1$.
g) $(x^2 - 9)(2 - 4x) = 0$.
h) $(2x+1)(x^2 - 7) = 0$.

Exercice n°5

Les fonctions ci-dessous sont définies sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 0,5x^3 + 1$.
b) $h(x) = -0{,}75x^3 + 2$.
c) $g(x) = x^3$.
d) $k(x) = -0{,}25x^3 + 2$.

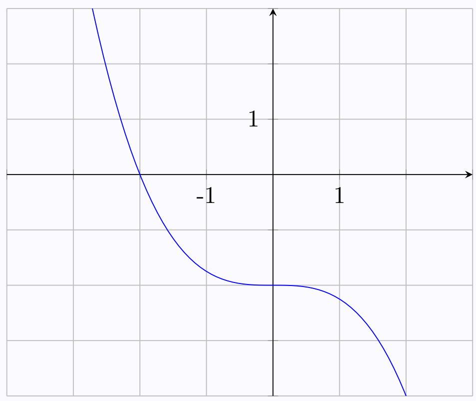
Associer chacune des courbes ci-dessous aux fonctions données.



Exercice n°6

On a représenté ci-dessous une fonction polynôme de degré 3 dont l-expression est :

$$f(x) = ax^3 + b.$$



1. Déterminer graphiquement la valeur de b.
2. Déterminer, par lecture graphique, le réel $f(-2)$.
3. En déduire l'expression de la fonction f.

Exercice n°7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3(x-8)(x+5)(x-3).$$

1. Dresser le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$
2. En déduire les solutions de l-inéquation

$$f(x) < 0.$$

Exercice n°8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $2(x-1)(x+4)(x-3) > 0$.
2. $-(x+1)^2(x+2) \leqslant 0$.

Exercice n°9

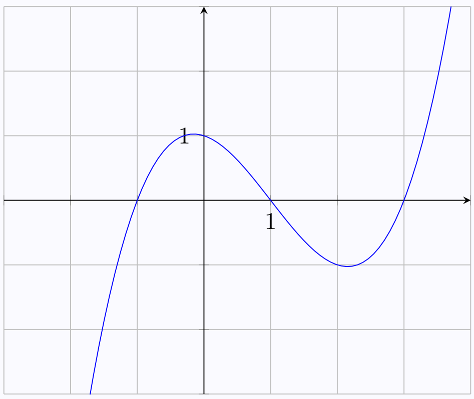
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $-2x(x+5)(x-2) > 0$.
2. $(x-1)^3 \leqslant 0$.

Exercice n°10

On a représenté ci-dessous une fonction polynôme du second degré dont lexpression est :

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$



1. Quelles sont les valeurs de x_1, x_2 et x_3 ?
2. Déterminer la valeur de a sachant que $f(2) = -3$.

Exercice n°11

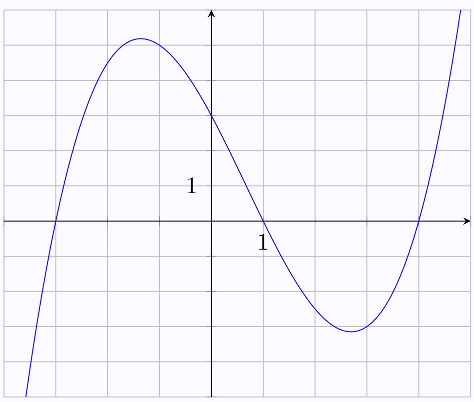
On considère la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = -2(x-3)(x+4)(x+1).$$

Déterminer ses racines puis dresser le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°12

On donne la représentation graphique dune fonction f polynôme du troisième degré.



1. Donner les racines de f.
2. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f(-1)$.
3. Déterminer l'expression algébrique de $f(x)$ sous forme factorisée (on pourra utiliser la valeur de $f(0)$).
4. Développer $f(x)$.
5. Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

Exercice n°13

L'objectif de l'exercice est de trouver le maximum de la fonction f définie sur l'intervalle $[200; 400]$ par

$$f(x) = -0,01x^3 + 4x^2.$$

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $[200; 400]$ et on note f sa dérivée. Calculer $f'(x)$ et montrer que
$$f'(x) = x(-0,03x + 8).$$
2. Donner le tableau de signe de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[200; 400]$.
3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[200; 400]$.
4. Quel est le maximum de cette fonction sur lintervalle $[200; 400]$? En quelle valeur est-il atteint ?
5. Pour vérifier la solution de léquation $f'(x) = 0$ sur l'intervalle $[200; 400]$, on utilise l'algorithme de balayage ci-dessous, écrit en langage Python :

Progamme Python

```
def balayage (pas):
x=200
while x*(-0.03 *x+8)>0:
x=x+pas
return (x - pas , x)
```

Que renvoie l'instruction balayage(1) ?

Exercice n°14

Soit f la fonction définie sur lintervalle $[-5; 5]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 8.$$

1. (a) Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[-5; 5]$.
   (b) Vérifier que pour tout $x \in [5; 5]$,
   $$f'(x) = 3(x-4)(x+2).$$
2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-5; 5]$.
   (b) En déduire les variations de f sur l'intervalle $[-5; 5]$.
3. Déterminer la valeur de x pour laquelle la fonction f admet un maximum sur l'intervalle $[-5; 5]$ et en préciser la valeur.