Variables aléatoires

1re STMG

maths-mde.fr

Cours pour élève à imprimer

Exemple

Une expérience aléatoire consiste à lancer un dé à six faces et regarder le résultat obtenu.
L'univers associé à cette expérience est l'ensemble de toutes les issues possibles.
Ici $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 2 €.
- Si le résultat est 1, on gagne 3 €.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 6 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur Ω qui peut prendre les valeurs 2, 3 ou -6.
Pour les issues 2, 4 ou 6, on a : $X = 2$; pour l'issue 1, on a : $X = 3$ pour les issues 3 et 5, on a : $X = -6$

Définition

Lorsqu'à chaque évènement élémentaire d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une variable aléatoire.

2. Loi de probabilité dune variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$.
L'évènement « X prend la valeur x_i » est noté $(X = x_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$.

Définition

Lorsqu'à chaque valeur x_i (avec $1 \leqslant i \leqslant n$) prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité p_i de l'évènement $(X = x_i)$, on dit que l'on définit une variable aléatoire.
On présente généralement la loi de probabilité d'une variable aléatoire dans un tableau.

Exemple

En reprenant l'exemple du départ et en additionnant les probabilités des événements élémentaires, on obtient bel et bien 1 :

$$\begin{aligned} P(X=2)+P(X=3)+P(X=-6) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3} \\ &= \frac{3}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6} \\ &= \frac{6}{6} \\ &= 1. \end{aligned}$$

3. Espérance d'une variable aléatoire

Soit Ω l'univers correspondant à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire définie sur Ω prenant n valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$ avec des des probabilités respectives $p_1, p_2, \cdots, p_n$.

Définition

L'espérance de X est le nombre, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n.$$

Remarque

L'espérance est la moyenne des valeurs x_i pondérées par les probabilités p_i.

Exemple

En reprenant l'exemple du départ, on obtient :

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + x_3 P(X = x_3) \\ &= 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} - 6 \times \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. Répétition d'expériences identiques et indépendantes

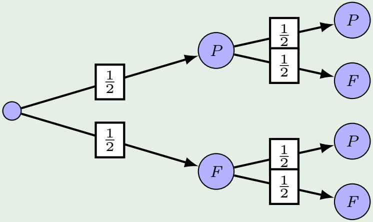
Définition

On dit que deux expériences aléatoires sont indépendantes lorsque les résultats de l'une n'influencent pas les probabilités de l'autre.

Règle d'utilisation d'un arbre pondéré

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud vaut 1.
- La probabilité d'une issue représentée par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.
- La probabilité d'un événement T est la somme des probabilités des issues associées aux chemins qui conduisent à la réalisation de T.

Exemple : On lance deux fois de suite une pièce de monnaie non truquée

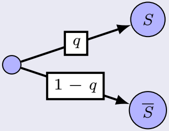


5. Loi de Bernoulli

Définition

On appelle épreuve de **Bernoulli** de paramètre p, toute expérience aléatoire admettant exactement deux issues :

- l'une appelée « succès » notée S, dont la probabilité est $p(S) = q$;
- l'autre appelée « échec » notée $\overline{S}$, dont la probabilité est $p(\overline{S}) = 1 - q$.



Propriété

Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 lorsque S est réalisé et 0 sinon.

La loi de probabilité de X est donnée sous la forme du tableau :

k	0	1
$p(X = k)$	q	$1 - q$

On dit que la variable X suit une loi de Bernoulli de paramètre q.

Exemple : On lance une pièce de monnaie non truquée

Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 lorsque le côté face est obtenu et 0 sinon.

La loi de probabilité de X est donnée sous la forme du tableau :

k	0	1
$p(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$