Les suites

1re STMG

maths-mde.fr
Cours pour élève à imprimer

1. Introduction

Activité

Compléter les suites "logiques" suivantes. Donner, si possible, le 10$^{\text{ème}}$ nombre de la suite, puis le 20$^{\text{ème}}$.

a. 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;. . .
b. 2 ;4 ;6 ;8 ;10 ;. . .
c. 3 ;7 ;11 ;15 ;19 ;. . .
d. 2 ;4 ;8 ;16 ;32 ;. . .
e. 2 ;3 ;5 ;9 ;17 ;. . .
f. 0 ;1 ;8 ;27 ;64 ;125 ;. . .
g. 1 ;1 ;2 ;3 ;5 ;8 ;13 ;21 ;. . .

Définition

- Une suite numérique est une liste de nombres réels, ordonnée, et indexée par les entiers naturels (ou numérotée).
- Une suite numérique se note généralement (u_n), l'indice n représentant un nombre entier naturel.
- Le nombre u_n est le terme de rang n de la suite (u_n), soit le $n^{\text{ème}}$ terme.

Activité

Compléter les suites "logiques" suivantes. Donner, si possible, le $10^{\text{ème}}$ nombre de la suite, puis le $20^{\text{ème}}$.

a. $1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;\dots$
b. $2\,;4\,;6\,;8\,;10\,;\dots$
c. $3\,;7\,;11\,;15\,;19\,;\dots$
d. $2\,;4\,;8\,;16\,;32\,;\dots$
e. $2\,;3\,;5\,;9\,;17\,;\dots$
f. $0\,;1\,;8\,;27\,;64\,;125\,;\dots$
g. $1\,;1\,;2\,;3\,;5\,;8\,;13\,;21\,;\dots$

Définition

- Une suite numérique est une liste de nombres réels, ordonnée, et indexée par les entiers naturels (ou numérotée).
- Une suite numérique se note généralement (u_n), l'indice n représentant un nombre entier naturel.
- Le nombre u_n est le terme de rang n de la suite (u_n), soit le $n^{\text{ème}}$ terme.

Définition

Une suite (u_n) est définie de manière **explicite** lorsque l'on peut exprimer le terme général u_n en fonction de son indice n.

Exemple

Pour chacune des suites suivantes, on peut calculer directement n'importe quel terme u_n de la suite en remplaçant n par la valeur souhaitée.

- $u_n = 3n - 5$
- $u_n = (-1)^n$
- $u_n = 2 \times 3^n$
- $u_n = \dfrac{n}{n+2}$.

Définition

Une suite (u_n) est définie par **récurrence** quand elle est définie par la donnée :

- de son terme initial, généralement u_0 ;
- d'une relation qui permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant. Cette relation est appelée relation de récurrence.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 & = 1000 \\ u_{n+1} & = 1,04\, u_n \end{cases}$.

Alors, $u_0 = 1000$,
$u_1 = 1,04 \times u_0 = 1,04 \times 1000 = 1040$,
$u_2 = 1,04 \times u_1 = 1,04 \times 1040 = 1081,6$,
$u_3 = 1,04 \times u_2 = \ \ldots$

2. Modes de génération d'une suite

Définition

Une suite (u_n) est définie de manière **explicite** lorsque l'on peut exprimer le terme général u_n en fonction de son indice n.

Exemple

Pour chacune des suites suivantes, on peut calculer directement n'importe quel terme u_n de la suite en remplaçant n par la valeur souhaitée.

- $u_n = 3n - 5$
- $u_n = (-1)^n$
- $u_n = 2 \times 3^n$
- $u_n = \dfrac{n}{n+2}$.

Définition

Une suite (u_n) est définie par **récurrence** quand elle est définie par la donnée :

- de son terme initial, généralement u_0 ;
- d'une relation qui permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant. Cette relation est appelée relation de récurrence.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 & = 1000 \\ u_{n+1} & = 1,04\, u_n \end{cases}$.

Alors, $u_0 = 1000$,
$u_1 = 1,04 \times u_0 = 1,04 \times 1000 = 1040$,
$u_2 = 1,04 \times u_1 = 1,04 \times 1040 = 1081,6$,

$u_3 = 1,04 \times u_2 = \ \ldots$

2. Modes de génération d'une suite

Définition

Une suite (u_n) est définie de manière **explicite** lorsque l'on peut exprimer le terme général u_n en fonction de son indice n.

Exemple

Pour chacune des suites suivantes, on peut calculer directement n'importe quel terme u_n de la suite en remplaçant n par la valeur souhaitée.

- $u_n = 3n - 5$
- $u_n = (-1)^n$
- $u_n = 2 \times 3^n$
- $u_n = \dfrac{n}{n+2}$.

Définition

Une suite (u_n) est définie par **récurrence** quand elle est définie par la donnée :

- de son terme initial, généralement u_0 ;
- d'une relation qui permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant.
  Cette relation est appelée relation de récurrence.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 & = 1000 \\ u_{n+1} & = 1,04\, u_n \end{cases}$.

Alors, $u_0 = 1000$,
$u_1 = 1,04 \times u_0 = 1,04 \times 1000 = 1040$,
$u_2 = 1,04 \times u_1 = 1,04 \times 1040 = 1081,6$,

$u_3 = 1,04 \times u_2 = \ \ldots$

2. Modes de génération d'une suite

Définition

Une suite (u_n) est définie de manière **explicite** lorsque l'on peut exprimer le terme général u_n en fonction de son indice n.

Exemple

Pour chacune des suites suivantes, on peut calculer directement n'importe quel terme u_n de la suite en remplaçant n par la valeur souhaitée.

- $u_n = 3n - 5$
- $u_n = (-1)^n$
- $u_n = 2 \times 3^n$
- $u_n = \dfrac{n}{n+2}$.

Définition

Une suite (u_n) est définie par **récurrence** quand elle est définie par la donnée :

- de son terme initial, généralement u_0 ;
- d'une relation qui permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant.
  Cette relation est appelée relation de récurrence.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 & = 1000 \\ u_{n+1} & = 1,04\, u_n \end{cases}$.

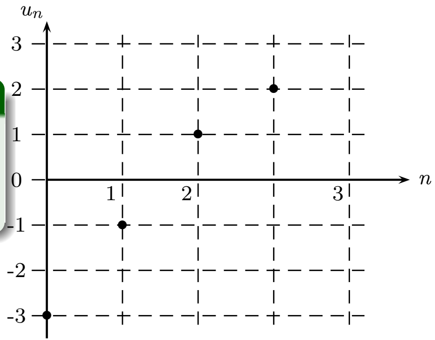
Alors, $u_0 = 1000$,
$u_1 = 1,04 \times u_0 = 1,04 \times 1000 = 1040$,
$u_2 = 1,04 \times u_1 = 1,04 \times 1040 = 1081,6$,
$u_3 = 1,04 \times u_2 = \ \ldots$

Définition

- Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n; u_n)$.
- Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n - 3$, alors
$u_0 = -3$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3$ ...
$u_{20} =$ ...
$u_{50} =$ ...
$u_{5250} =$ ...



4. Sens de variation d'une suite

Définitions

- Une suite (u_n) est croissante si pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est décroissante si pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est constante si pour tout entier naturel n : $u_n = u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Remarque

Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes. En effet,
La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

Méthode

Dans la pratique, pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_n = 3n + 2$ est croissante. En effet,
$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 2 - (3n+2) = 3n + 3 + 2 - 3n - 2 = 3 > 0$.

4. Sens de variation d'une suite

Définitions

- Une suite (u_n) est croissante si pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est décroissante si pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est constante si pour tout entier naturel n : $u_n = u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Remarque

Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes. En effet,
La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

Méthode

Dans la pratique, pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_n = 3n + 2$ est croissante. En effet,
$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 2 - (3n+2) = 3n + 3 + 2 - 3n - 2 = 3 > 0$.

4. Sens de variation d'une suite

Définitions

- Une suite (u_n) est croissante si pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est décroissante si pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est constante si pour tout entier naturel n : $u_n = u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Remarque

Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes. En effet,
La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

Méthode

Dans la pratique, pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_n = 3n + 2$ est croissante. En effet,
$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 2 - (3n+2) = 3n + 3 + 2 - 3n - 2 = 3 > 0$.

4. Sens de variation d'une suite

Définitions

- Une suite (u_n) est croissante si pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est décroissante si pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est constante si pour tout entier naturel n : $u_n = u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Remarque

Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes. En effet,
La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

Méthode

Dans la pratique, pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_n = 3n + 2$ est croissante. En effet,
$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 2 - (3n+2) = 3n + 3 + 2 - 3n - 2 = 3 > 0$.

5. Suites arithmétiques

Définition

Une suite est dite arithmétique lorsque chaque terme se déduit du précédent en lui ajoutant un nombre réel constant r, appelé raison de la suite. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + r$.

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} \dots \quad \dots \quad u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1} \quad \dots$$

Propriété

Une suite est arithmétique si et seulement sa représentation graphique est un nuage de points alignés. On parle alors de croissance linéaire.

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n par la relation $u_{n+1} = u_n + 1$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$.
Si $r > 0$, (u_n) est croissante ; si $r < 0$, (u_n) est décroissante ; si $r = 0$, (u_n) est constante.

Définition

Une suite est dite géométrique lorsque chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par un nombre réel constant q, appelé raison de la suite. Ainsi, pour tout $n \in N$: $u_{n+1} = q \times u_n$.

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \xrightarrow{\times q} \dots \quad \dots \quad u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1} \quad \dots$$

Exemple

- La suite de nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... des puissances successives de 2 est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.
- La suite (v_n) de terme général $v_n = (-1)^n$, pour laquelle $v_0 = 1$, $v_1 = -1$, $v_2 = 1$, $v_3 = -1$, ... est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = -1$.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q telle que $u_0 > 0$:

- Si $q > 1$, (u_n) est croissante ; si $0 < q < 1$, (u_n) est décroissante ; si $q = 1$, (u_n) est constante.
- Le nuage de points représentant la suite (u_n) suit une croissance exponentielle.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors, pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n$.

Remarques

- Pour prouver qu'une suite (u_n) est arithmétique, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la différence $u_{n+1} u_n$ est une constante, c'est-à-dire indépendante de l'entier n.
- Pour prouver qu'une suite (u_n) est géométrique, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quotient $\dfrac{u_n + 1}{u_n}$ est une constante, c'est-à-dire indépendante de l'entier n.

Exemple

- La suite arithmétique (v_n) de premier terme $v_0 = -5$ et de raison $r = 2$, s'écrit sous la forme $v_n = 2n - 5$.
- La suite arithmétique (w_n) de premier terme $w_0 = 7$ et de raison $r = -3$, s'écrit sous la forme $w_n = -3n + 7$.
- La suite géométrique (z_n) de premier terme $0,2$ et de raison $q = 1,1$, s'écrit sous la forme $z_n = 0,2 \times 1,1^n$.