Tableaux croisés et probabilités conditionnelles

1re STMG

maths-mde.fr

1. Tableaux croisés

Activité

Définition

Un tableau croisé d'effectifs est un tableau à double-entrées présentant les valeurs du premier caractère en ligne et celles du second caractère en colonne.

- À l'intersection d'une ligne et d'une colonne, le tableau indique le nombre d'individus présentant simultanément la valeur du premier caractère correspondant à cette ligne et la valeur du second caractère correspondant à cette colonne.
- On ajoute ensuite une ligne et une colonne « Total » indiquant le nombre d'individus présentant chacune des valeurs du caractère. Ce sont les effectifs marginaux.
- À l'intersection de la ligne et de la colonne « Total », on indique l'effectif total, c'est-à-dire le nombre d'individus de la population de référence.

Exemple

On place des boules toutes indiscernables au toucher dans un sac. Sur chaque boule colorée est inscrite une lettre. Le tableau suivant présente la répartition des boules.

	Rouge	Vert	Bleu	Total
A	3	5	2	10
B	2	2	6	10
Total	5	7	8	20

Dans ce sac, il y a 2 boules bleues portant la lettre A.

Définitions

- Les fréquences **marginales** correspondent aux fréquences de chaque caractère dans une population donnée.
- La fréquence conditionnelle se calcule par rapport à un sous-ensemble de l'effectif total.

Exemple 1 : En utilisant l'exemple précédent, on peut construire le tableau croisé de fréquences.

	Rouge	Vert	Bleu	Total
A	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\dfrac{2}{20}$	$\frac{10}{20}$
B	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\dfrac{6}{20}$	$\frac{10}{20}$
Total	$\frac{5}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{8}{20}$	1

Dans ce tableau, on peut lire par exemple, la fréquence de boules vertes portant la lettre B est égale à $\dfrac{2}{20}$.

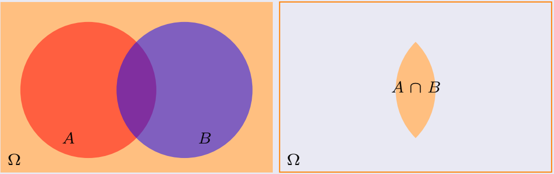
Exemple 2 : En utilisant l'exemple précédent, on peut trouver les fréquences conditionnelles.

	Rouge	Vert	Bleu	Total
A	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\dfrac{2}{10}$	1
B	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\dfrac{6}{10}$	1

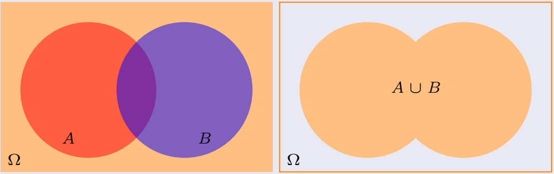
Sur la première ligne, on peut lire, parmi les boules portant la lettre A, $\frac{3}{10}$ sont rouges, $\frac{5}{10}$ sont vertes et $\dfrac{2}{10}$ sont sont bleues.

2. Quelques rappels de probabilités

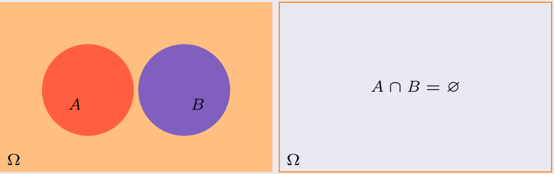
- Une expérience est dite **aléatoire** lorsqu'on ne peut pas en prévoir avec certitude le résultat.
- On appelle **univers**, l'ensemble noté Ω de tous les résultats possibles.
- On appelle **événement**, toute partie de l'univers.
- On appelle **événement élémentaire**, tout événement ne comportant qu'un seul élément.
- L'événement $A \cap B$, autrement dit « A et B », est l'événement formé de tous les résultats possibles appartenant à A et à B.



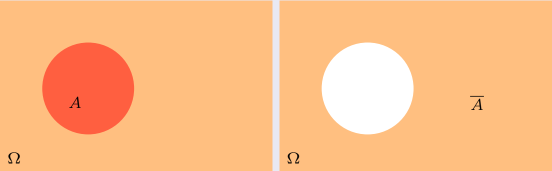
- L'événement $A \cup B$, autrement dit « A ou B », est l'événement formé de tous les résultats possibles appartenant à A ou à B.



- Deux événements sont dits **incompatibles** ou disjoints si leur intersection est vide.



- On appelle **événement contraire** d'un événement A, l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les résultats possibles n'appartenant pas à A.



- L'événement correspondant à l'ensemble vide est dit **événement impossible**.
- L'événement correspondant à l'univers est dit **événement certain**.

Exemple

On considère un tirage au hasard d'une carte dans un jeu de 32 cartes.

- L'univers Ω est l'ensemble formé des 32 cartes.
- « Obtenir un as » est un événement.
- « Obtenir un as de pique » est un événement élémentaire.
- Soient A l'événement : « obtenir un as » et B l'événement : « obtenir un coeur ».
  - L'événement $A \cap B$ correspond à « obtenir un as **et** un coeur ».
  - L'événement $A \cup B$ correspond à « obtenir un as **ou** un coeur ».
- Les deux événements « obtenir un coeur » et « obtenir un trèfle » sont incompatibles.
- Soit R l'événement « obtenir une carte rouge ». $\overline{B}$: « obtenir une carte noire » est l'événement contraire.
- « obtenir un 2 » est événement impossible.
- « obtenir une carte rouge ou noire » est un événement certain.

3. Probabilité d'un événement

Propriétés

La loi probabilité associée à une expérience aléatoire définie sur un univers Ω vérifie :

- $p(\varnothing) = 0$.
- $p(\Omega) = 1$.
- Pour tout événement A, $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.
- Si un événement A est inclus dans un événement B, $p(A) \leqslant p(B)$.
- Pour tout événement A, $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$.
- Si deux événements A et B sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- Si A et B ne sont pas incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Exemples

On tire au hasard une carte de façon équiprobable dans un jeu de 32 cartes et on note.
⋆ A l'événement « la carte tirée est un as ».
⋆ B l'événement « la carte tirée est un carreau ».
⋆ C l'événement « la carte tirée est une figure (valet, dame, roi) ».
On a alors :

- $p(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$; $p(B) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$; $p(C) = \dfrac{12}{32} = \dfrac{3}{8}$; $p(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$.
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{4}{32} + \dfrac{8}{32} - \dfrac{1}{32} = \dfrac{11}{32}$.
- $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A) = \dfrac{7}{8}$.
- $p(A \cup C) = p(A) + p(C) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{2}$.

4. Probabilités conditionnelles

Définition

Le nombre d'issues qui réalisent l'évènement A est appelé cardinal de A. Il est noté $Card(A)$.

Définition

Soient A et B deux évènements tels que $Card(A) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de B sachant A est la probabilité que l'évènement B soit réalisé sachant que l'évènement A est réalisé. Elle est notée $p_A(B)$:

$$p_A(B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)}.$$

Exemple

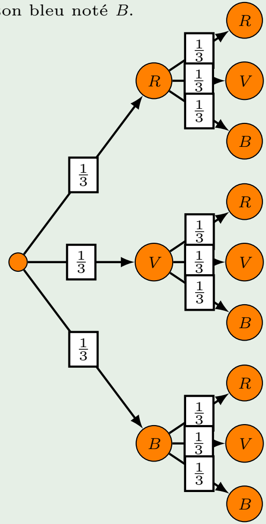
Dans une classe STMG, après la visite médicale, on a dressé le tableau suivant :

	Porte des lunettes	Ne porte pas de lunettes	Total
Fille	3	15	18
Garçon	7	5	12
Total	10	20	30

Les fiches individuelles de renseignements tombent par terre et s'éparpillent.
On choisit un élève au hasard et on considère les évènements suivants :
A : « l'élève est une fille » et B : « l'élève porte des lunettes ».
Ainsi, $p_A(B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ et $p_B(A) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)} = \frac{3}{10}$.

Exemple : Tirages successifs avec remise

Une boite contient 3 jetons : un rouge noté R, un vert noté V et un jeton bleu noté B.



On tire au hasard un premier jeton que l'on remet dans la boite avant de tirer un deuxième jeton.

Le nombre des issues possibles est égal à 9.

- $p\,(\text{« obtenir deux jetons rouges »}) = \dfrac{1}{9}$.
- $p\,(\text{« obtenir au moins un jeton rouge »}) = \dfrac{5}{9}$.

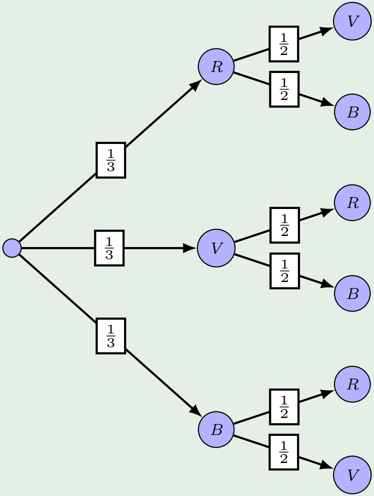
Exemple : Tirages successifs sans remise

Une boite contient 3 jetons : un rouge noté R, un vert noté V et un jeton bleu noté B.

On tire au hasard un premier jeton puis un deuxième sans remettre le premier dans la boite.

Le nombre d'issues possibles est égal à 6.

- p (« obtenir jetons rouges ») $= 0$.
- p (« obtenir au moins un jeton rouge ») $= \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.



Exercices Entraînement