Généralités sur les fonctions

1re STMG

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour les élèves

1. Vocabulaire

Définition

Une fonction est un procédé qui a un nombre x associe un (unique) nombre que l'on note $f(x)$.

$$x \longrightarrow \boxed{\text{machine ou processus } f} \longrightarrow f(x).$$

- On note : $f : x \to f(x)$ (La fonction f qui à x associe $f(x)$).
- Si y est l'image de x par la fonction f (c'est-à-dire si $y = f(x)$) alors on dit que x est un antécédent de y par la fonction f.
- L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des réels x tels $f(x)$ existe.
- Un réel dont l'image ne peut pas être calculée par f est appelée valeur interdite de f.

Exemple

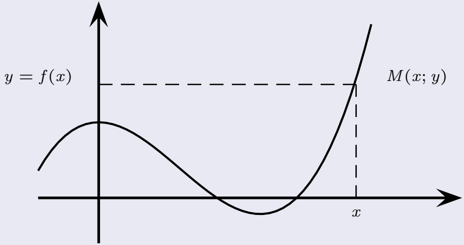
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 1$.

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble de définition de la fonction f.
- 1 est l'image de 0 par f. En effet, $f(0) = 3 \times 0^2 + 1 = 1$.
- 2 et -2 sont les deux antécédents de 13 par f. En effet, $f(x) = 13 \Leftrightarrow 3x^2 + 1 = 13 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

2. Représentation graphique

Définition

La courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble des points $M(x; f(x))$, où x appartient à l'ensemble de définition de f.



$$M(x; y) \in \mathcal{C}_f \quad \text{si et seulement si} \quad y = f(x).$$

Exemple

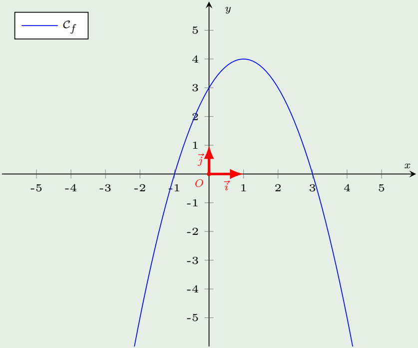
Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 2x - 1$.
Un point $M(x; y)$ est sur $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $y = f(x)$, c'est-à-dire si $y = f(x) = 2x - 1$.

$\mathcal{C}_f$ est donc la droite d'équation $y = 2x - 1$.

Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les intervalles sur lesquels elle est croissante, ceux sur lesquels elle est décroissante ou ceux sur lesquels elle est constante.
On résume en général ces résultats dans un tableau de variation.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $[-3;4]$ par l'expression $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.
À l'aide d'une calculatrice, on peut tracer l'allure **approximative** de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.



Le tableau de variation est un schéma de la courbe, ne montrant que les variations.

x	-3		1		4
$f(x)$	$f(-3)$	$\nearrow$	$f(1) = 4$	$\searrow$	$f(4)$

On indique les valeurs extrêmes $f(-3)$ et $f(4)$ ainsi que la valeur du maximum $f(1) = 4$.

2. Les fonctions affines

Définition

Une fonction affine est une fonction dont l'expression peut s'écrire sous la forme $f(x) = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels.

Propriété

La courbe représentative de la fonction affine $f(x) = mx + p$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $y = f(x)$, soit $y = mx + p$, c'est-à-dire la droite (d) d'équation $y = mx + p$.

Définition

- Le nombre m est appelé coefficient directeur de la droite (d).
- Le nombre p est appelé ordonnée à lorigine de la droite (d).

Cas particuliers :

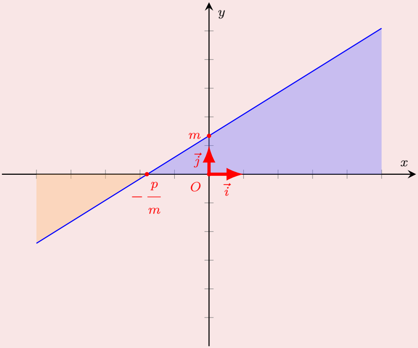
- Si $p = 0$, alors la droite passe par lorigine du repère (elle représente une fonction linéaire).
- Si $m = 0$, alors la droite est horizontale (elle représente une fonction constante).

Propriété

Soit m et p deux nombres réels avec $m \neq 0$.

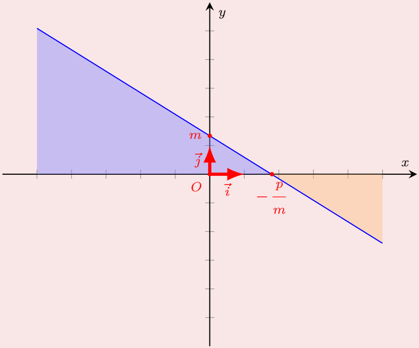
La fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ s'annule et change de signe en $x = \dfrac{-p}{m}$.

Si $m > 0$, f est croissante.



x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $m < 0$, f est décroissante.



x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exemples

- Signe de $f(x) = 4x - 8$.
  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$.
  Le coefficient directeur 4 est positif, donc f est croissante et le « + » est mis après le « 0 ».

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- Signe de $g(x) = 9 - 3x$.
  $g(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - 3x = 0 \Leftrightarrow 9 = 3x \Leftrightarrow x = 3$.
  Le coefficient directeur -3 est négatif, donc g est décroissante et le « + » est mis avant le « 0 »

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	