Fonctions polynômes de degré 2

1re STMG

maths-mde.fr

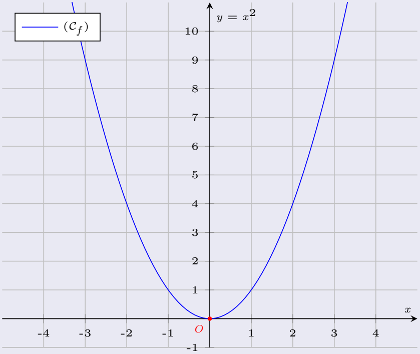
Cours pour élève à imprimer

1. La fonction carré
2. Équation de la forme $x^2 = a$
3. Fonctions polynômes du second degré $x \longrightarrow ax^2$ et $x \longrightarrow ax^2 + b$
4. Fonctions polynômes de degré 2 de la forme $x \longrightarrow a(x - x_1)(x - x_2)$
5. Signe d'une fonction polynôme du second degré

1. La fonction carré

Définition

On appelle fonction carré, la fonction qui à un nombre réel associe son carré. En d'autres termes, la fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.



2. Équation de la forme $x^2 = a$

Propriété

Les solutions de l'équation $x^2 = a$, avec $a > 0$, sont :

$$\boxed{-\sqrt{a} \text{ et } \sqrt{a}.}$$

Si a est négatif l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exemples

1. Résolution de l'équation $x^2 = 4$.
   $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4} = 2$ ou $x = -\sqrt{4} = -2$. Ainsi, $S = \{2\ ;\ -2\}$.
2. Résolution de l'équation $x^2 = -3$.
   Cette équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, $S = \varnothing$.
3. Résolution de $(x-3)^2 = 25$.

$$\begin{aligned}(x-3)^2 = 25 &\Leftrightarrow x-3 = \sqrt{25} \text{ ou } x-3 = -\sqrt{25}\\ &\Leftrightarrow x{\color{red}-3} = 5 \text{ ou } x{\color{red}-3} = -5\\ &\Leftrightarrow x = 5{\color{red}+3} \text{ ou } x = -5{\color{red}+3}\\ &\Leftrightarrow x = 8 \text{ ou } x = -2. \text{ Ainsi, } S = \{8\ ;\ -2\}.\end{aligned}$$

3. Fonctions polynômes du second degré $x \longrightarrow ax^2$ et $x \longrightarrow ax^2 + b$

Définition

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longrightarrow ax^2$ et $x \longrightarrow ax^2 + b$, avec a et b des réels et $a \neq 0$, sont des fonctions polynômes du second degré.

Leur représentation graphique s'appelle une parabole, elle est tournée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$.

Le cas : $f(x) = ax^2$, avec $a \neq 0$.

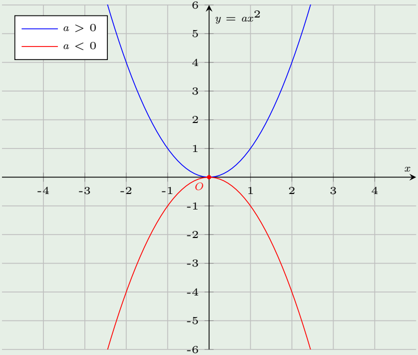


Tableau de variations : $a > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	$f(0) = 0$	↗

Tableau de variations : $a < 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	$f(0) = 0$	↘

Le cas : $f(x) = ax^2 + b$, avec $a \neq 0$.

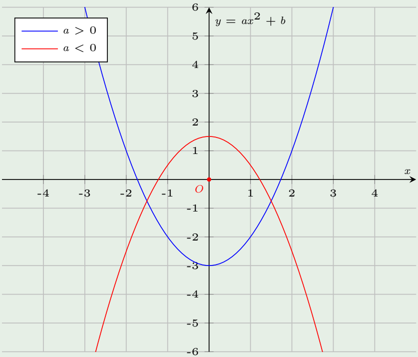


Tableau de variations : $a > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(0) = b$	$\nearrow$	

Tableau de variations : $a < 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(0) = b$	$\searrow$	

Propriété

Dans un repère orthogonal, toute fonction polynôme du second degré est représentée par une parabole $\mathcal{P}$. La parabole $\mathcal{P}$ admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées (Oy).

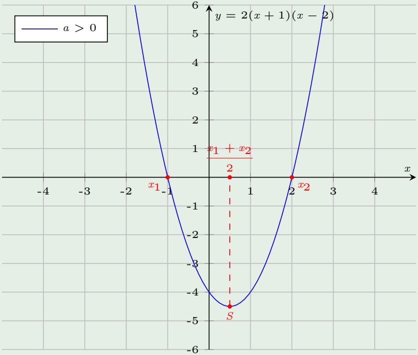
Le point d'intersection de la parabole $\mathcal{P}$ et de l'axe (Oy) est appelé sommet de la parabole. Il est noté S. Il a pour coordonnées $S(0; b)$.

4. Fonctions polynômes de degré 2 de la forme $x \longrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)$

Propriété

Dans un repère orthogonal, toute fonction du type $x \longrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)$ est représentée par une parabole qui admet pour sommet le point S d'abscisse $\alpha = \dfrac{x_1+x_2}{2}$ et pour axe de symétrie la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

Exemple 1 : $f(x) = 2(x+1)(x-2)$.

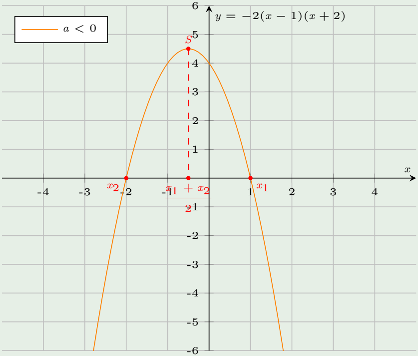


Ici, $a = 2 > 0$, $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.
Ainsi, $\dfrac{x_1+x_2}{2} = \dfrac{-1+2}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{9}{2}$.

Tableau de variations

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}$	↗

Exemple 2 : $f(x) = -2(x-1)(x+2)$.



Ici, $a = -2 < 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$.
Ainsi, $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{1-2}{2} = -\dfrac{1}{2}$ et $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{9}{2}$.

Tableau de variations

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$	$\searrow$	

Remarques

- x_1 et x_2 sont les racines du polynôme. Ce sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.
- Le nombre α est la moyenne des racines x_1 et x_2.

5. Signe d'une fonction polynôme du second degré

Pour étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré de la forme $x \longrightarrow a(x - x_1)(x - x_2)$, on étudie le signe de chacun des trois facteurs et on dresse un tableau de signes.

Exemple : Signe de $h(x) = f(x)g(x) = (4x - 8)(9 - 3x)$.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $h(x) > 0$ pour tout x de $]2; 3[$ et $h(x) < 0$ pour tout x de $]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$.