Dérivation

1re STMG

maths-mde.fr

Cours pour élève à imprimer

Définition

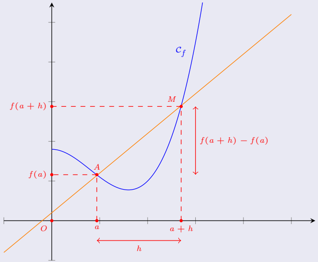
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.
Soit h un réel non nul tel que $a + h \in I$. Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est le rapport (quotient) $t(h)$ défini par : $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Le taux de variation de f entre 1 et 2 est : $\dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \dfrac{2^2 - 1^2}{2 - 1} = \dfrac{3}{1} = 3$.

On considère deux points A et M d'une courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et $a + h$.
La droite (AM) est appelée sécante à la courbe $\mathcal{C}_f$.
Graphiquement, le taux de variation de f entre a et $a + h$ est le coefficient directeur de la sécante (AM) :

$$t(h) = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$



2. Nombre dérivé et tangente à une courbe

Définition

On dit que f est dérivable en a lorsque le taux de variation $t(h)$ admet comme limite un nombre réel quand h tend vers 0. Ce nombre, noté $f'(a)$ est appelé **nombre dérivé** de f en a. On a ainsi :
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.

$\lim\limits_{h \to 0} t(h) = l$, se lit la « limite » quand h tend vers 0 de $t(h)$ égale l.
Cela signifie que lorsque le nombre h devient très proche de 0, le nombre $t(h)$ prend des valeurs très voisines de l, autrement dit, aussi proche que l'on veut.

Exemples

- On considère la fonction f définie par : $f(x) = 3x+1$.

  Le nombre dérivé de f en 2 est déterminé par : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

  Or, $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{3(2+h)+1-(3\times 2+1)}{h} = \dfrac{6+3h+1-7}{h} = \dfrac{3h}{h} = 3$. Ainsi, $f'(2) = 3$.

- On considère la fonction g définie par : $g(x) = x^2$.

  Le nombre dérivé de g en 1 est déterminé par : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}$.

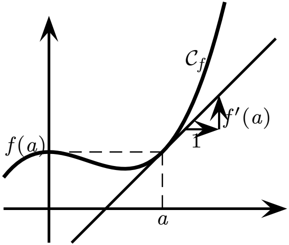
  Or, $\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \dfrac{(1+h)^2-1^2}{h} = \dfrac{1+2h+h^2-1}{h} = \dfrac{h(2+h)}{h} = 2+h$.

  Ainsi, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(2+h) = 2 = g'(1)$.

Définition

Soient f une fonction dérivable en a, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.
La **tangente à la courbe** $\mathcal{C}_f$ au point A est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.
Son équation réduit est de la forme :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$



Aux alentours du point A, la tangente est la droite la plus proche de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exemples

- On considère la fonction f définie par : $f(x) = 3x + 1$.
  L'équation de la tangente de la courbe $\mathcal{C}_f$ en 2 est donnée par : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$.
  Or, $f'(2) = 3$. Ainsi, $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 3(x-2) + 7 = 3x - 6 + 7 = 3x + 1$.
- On considère la fonction g définie par : $g(x) = x^2$.
  L'équation de la tangente de la courbe $\mathcal{C}_g$ en 1 est donnée par : $y = g'(1)(x-1) + g(1)$.
  Or, $g'(1) = 2$. Ainsi, $y = 2(x-1) + g(1) = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$.

3. Fonction dérivée, signe et sens de variation

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un un intervalle I.
La fonction qui, à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f.
On la note f'.

Propriétés

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout x de I, on a $f'(x) > 0$, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout x de I, on a $f'(x) \leqslant 0$, alors f est dcroissante sur I.
- Si pour tout x de I, on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Exemple

On considère la fonction g définie par : $g(x) = x^2$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée en x, $g'(x)$ est égale $2x$. En effet, pout tout $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(0) = 0$	$\nearrow$	

4. Calcul dune fonction dérivée

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Opérations sur les dérivées

f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée
ku, (k constante)	ku'
$u + v$	$u' + v'$

Propriétés

- Les fonctions polynômes de degré 2 définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2ax + b$.
- Les fonctions polynômes de degré 3 définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Propriété

Lorsque la fonction dérivée s'annule et change de signe, la fonction f admet un extremum local.