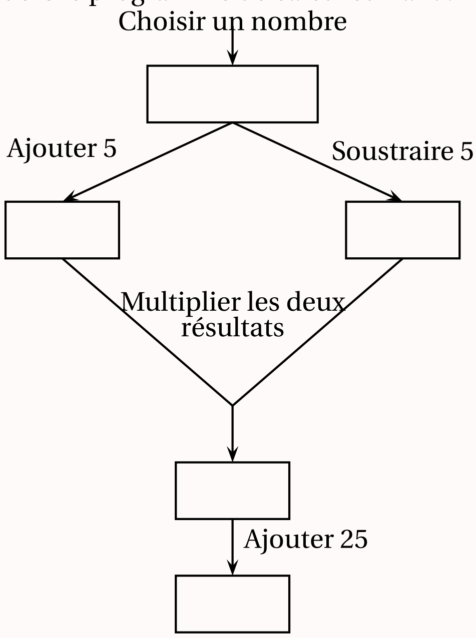
Corrigé : Devoir Surveillé n°5

Test des acquis

Principaux éléments du programme évalués	Acquisitions & Progrés	Note
Calcul littéral	1 2 3 4	
Résolution d'équation	1 2 3 4	
Théorème de Pythagore	1 2 3 4	
Théorème de Thalès	1 2 3 4	
Probabilités	1 2 3 4	
Algorithmique et programmation	1 2 3 4	
Grandeurs et mesures	1 2 3 4	
Raisonner, modéliser et communiquer	1 2 3 4	

Exercice 1

On considère le programme de calcul suivant :



1. (a) En appliquant ce programme sur 7, on obtient 49. En effet,
   $(7+5)\times(7-5)+25 = 24+25 = 49$.

   (b) En appliquant ce programme sur -4, on obtient 16. En effet,
   $(-4+5)\times(-4-5)+25 = -9+25 = 16$.

2. On note x le nombre choisi au départ.

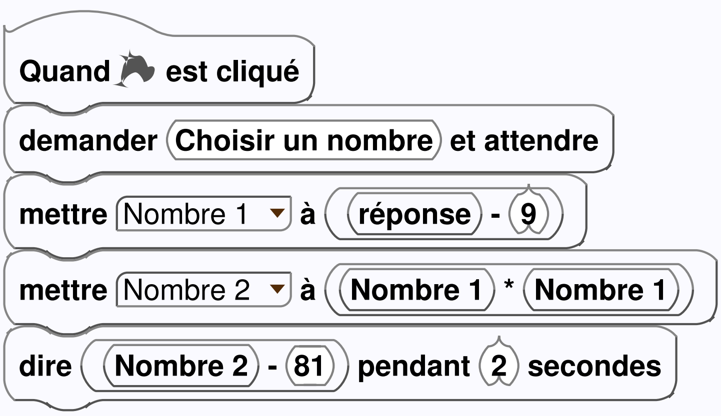
   (a) Ce programme peut être représenté par l'expression :
   $(x+5)(x-5)+25$.

   (b) $(x+5)(x-5) = x^2-5x+5x-25 = x^2-25$.

   (c) Sara a raison. En effet,
   $(x+5)(x-5)+25 = x^2-25+25 = x^2$.

Exercice 2

On considère le programme de calcul donné par le script ci-après.



1. En appliquant ce programme sur $-1,5$, on obtient $29,25$. En effet,
   $(-1,5-9)^2-81 = (-10,5)^2-81 = 110,25-81 = 29,25$.

2. On choisit x pour nombre de départ. Ce programme est donné par l'expression :
   $(x-9)^2-81 = x^2-18x+81-81 = x^2-18x$.

3. Ce programme donne 0, quand $x^2-18x=0$.
   Autrement dit quand, $x(x-18)=0$. C'est une équation produit nul.
   Par conséquent, ce programme donne 0, quand $x=0$ ou 18.

Exercice 3

Soit l'expression :

$$A = (5x-2)^2 - (5x-2)(2x+1).$$

1. Développement et réduction :

$$\begin{aligned}
A &= (5x-2)^2 - (5x-2)(2x+1)\\
&= (5x-2)(5x-2) - (5x-2)(2x+1)\\
&= [5x \times 5x + 5x \times (-2) + (-2) \times 5x + (-2) \times (-2)] - [5x \times 2x + 5x \times 1 + (-2) \times 2x + (-2) \times 1]\\
&= [25x^2 - 10x - 10x + 4] - [10x^2 + 5x - 4x - 2]\\
&= [25x^2 - 20x + 4] - [10x^2 + 1x - 2]\\
&= 25x^2 - 20x + 4 - 10x^2 - 1x + 2\\
&= 15x^2 - 21x + 6.
\end{aligned}$$

2. Factorisation :

$$\begin{aligned}
A &= (5x-2)^2 - (5x-2)(2x+1)\\
&= (5x-2)(5x-2) - (5x-2)(2x+1)\\
&= (5x-2)[(5x-2) - (2x+1)]\\
&= (5x-2)[5x - 2 - 2x - 1]\\
&= (5x-2)(3x-3).
\end{aligned}$$

3. Quand $x = \dfrac{2}{5}$,

$$\begin{aligned}
A &= \left(5 \times \frac{2}{5} - 2\right)^2 - \left(5 \times \frac{2}{5} - 2\right)\left(2 \times \frac{2}{5} + 1\right)\\
&= (2-2)^2 - (2-2) \times \left(2 \times \frac{2}{5} + 1\right)\\
&= 0^2 - 0 \times \left(2 \times \frac{2}{5} + 1\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

4. Résoudre l'équation : $(5x-2)(3x-3) = 0$.

$$5x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 3 = 0;$$

$$5x - 2 + 2 = 0 + 2 \quad \text{ou} \quad 2x - 3 + 3 = 0 + 3;$$

$$5x = 2 \quad \text{ou} \quad 3x = 3;$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{2}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{3x}{3} = \frac{3}{3};$$

$$x = \frac{2}{5} \quad \text{ou} \quad x = 1;$$

$\dfrac{2}{5}$ et 1 sont les deux solutions de cette équation.

Exercice 4

On lance deux dés non truqués, l'un est rouge et l'autre est bleu.

1. Ci-après un tableau à double entrée représentant les 36 issues possibles de cette expérience :

Rouge \ Bleu	1	2	3	4	5	6
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1 ; 6)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)
4	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)	(4 ; 5)	(4 ; 6)
5	(5 ; 1)	(5 ; 2)	(5 ; 3)	(5 ; 4)	(5 ; 5)	(5 ; 6)
6	(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 3)	(6 ; 4)	(6 ; 5)	(6 ; 6)

2. Soit B l'événement : "Obtenir deux chiffres identiques".
   $\mathscr{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

3. Soit B l'événement : "Obtenir une somme égale à 9".

Rouge \ Bleu	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

   Ainsi, $\mathscr{P}(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

4. L'événement "Obtenir 15" est impossible. La probabilité de cet événement vaut donc 0.

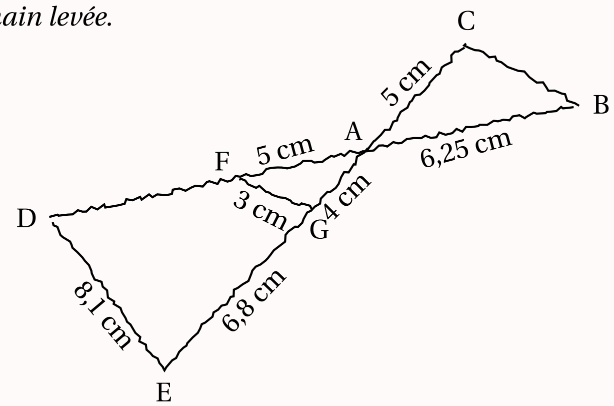
5. Notons S le nombre de fois où la somme obtenue est supérieure ou égale à 10.

Rouge \ Bleu	1	2	3	4	5	6	S
1	2	3	4	5	6	7	0
2	3	4	5	6	7	8	0
3	4	5	6	7	8	9	0
4	5	6	7	8	9	10	1
5	6	7	8	9	10	11	2
6	7	8	9	10	11	12	3

   Soit C l'événement : "la somme obtenue est supérieure ou égale à 8".
   $\mathscr{P}(C) = \frac{1+2+3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Exercice 5

Pour illustrer l'exercice, la figure ci-dessous a été faite à main levée.



Les points D, F, A et B sont alignés, ainsi que les points E, G, A et C.

De plus, les droites (DE) et (FG) sont parallèles.

1. Vérifions que : $AF^2 = AG^2 + GF^2$
   D'une part, $AF^2 = 5^2 = 25$.
   D'autre part, $AG^2 + GF^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$.
   L'égalité est vérifiée, alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle AFG est rectangle en G.

2. On sait que :
   Les doites (DE) et (FG) sont parallèles.
   Les droites (DF) et (EG) sont sécantes en A.
   Alors d'après la propriété de Thalès, on a :
   $\dfrac{AF}{AD} = \dfrac{AG}{AE} = \dfrac{FG}{DE}$.
   $\dfrac{5}{AD} = \dfrac{4}{10,8} = \dfrac{FG}{DE}$.
   Donc, $AD = \dfrac{5 \times 10,8}{4} = 13,5$ cm.
   Ainsi, $DF = AD - AF = 13,5 - 5 = 8,5$ cm.

3. On sait que :
   Les points F ; A ; B et G ; A ; C sont alignés dans le même ordre.
   Vérifions que : $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AG}{AC}$.
   D'une part : $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{5}{6,25} = \dfrac{4}{5}$.
   D'autre part : $\dfrac{AG}{AC} = \dfrac{4}{5}$.
   L'égalité est vérifiée, alors d'après la réciproque de la propriété de Thalès les droites (FG) et (BC) sont parallèles.