BREVET BLANC N°1

Jeudi 8 décembre 2022

Corrigé :

MATHÉMATIQUES

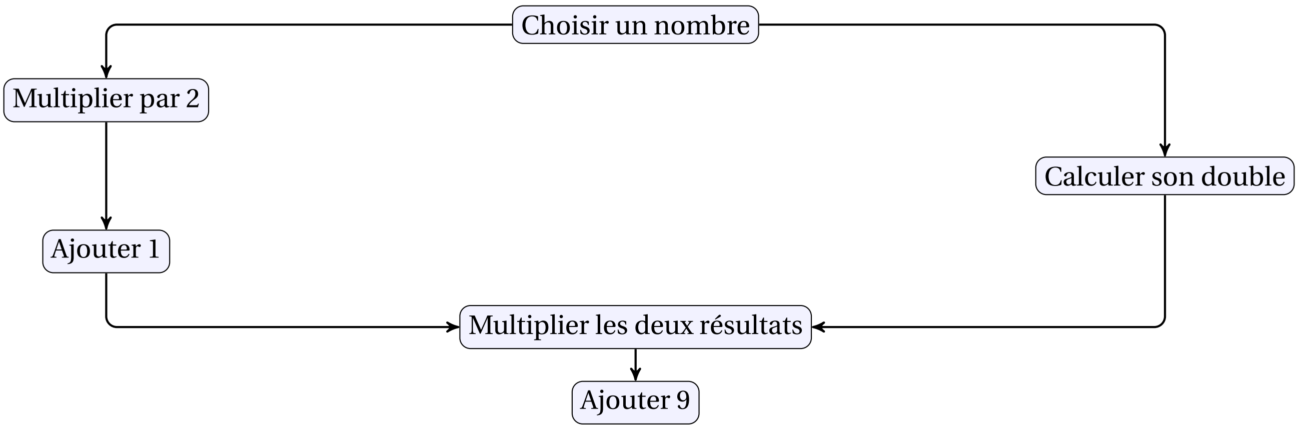
Tous les calculs doivent être détaillés et toutes les réponses justifiées, sauf si une indication contraire est donnée. L'utilisation de la calculatrice est autorisée (circulaire n° 99 - 186 du 16 novembre 1999).

Collège François Mitterrand

Durée de l'épreuve 2 h 00

Exercice 1 : (20 points)

1. Voici un programme de calcul :

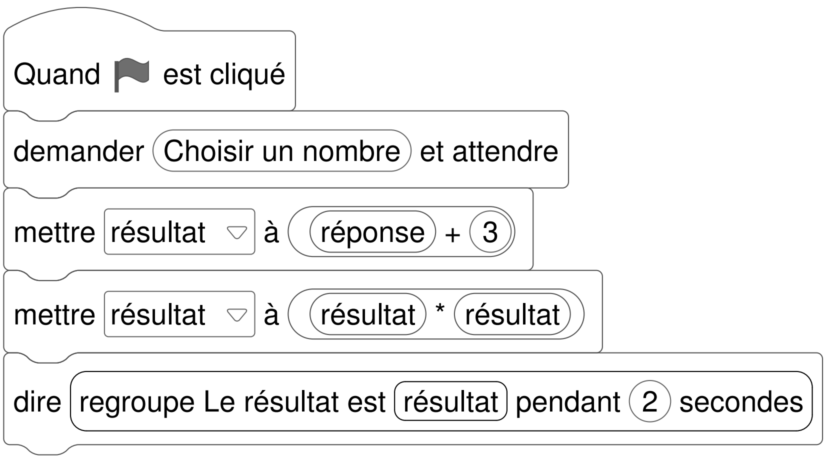


(a) En appliquant ce programme de calcul sur $\frac{3}{2}$, on obtient 21. En effet,
$2 \times \frac{3}{2} \times (2 \times \frac{3}{2} + 1) + 9 = 3 \times 4 + 9 = 12 + 9 = 21$. (2 pts)

(b) En appliquant ce programme de calcul sur -5, on obtient 99. En effet,
$2 \times (-5) \times \big(2 \times (-5) + 1\big) + 9 = -10 \times \big(-10 + 1\big) + 9 = 90 + 9 = 99$. (3 pts, seulement 1 pt si la réponse est donnée directement).

(c) Soit x le nombre de départ. Ce programme est donné par l'expression littérale suivante :
$2x(2x + 1) + 9 = 4x^2 + 2x + 9$. (3 pts, 1 pt si l'expression n'est pas développée et réduite)

2. On teste un autre programme de calcul avec le logiciel scratch :



(a) En choisissant $-1,5$, on obtient 2,25 avec ce programme. En effet,
$(-1,5 + 3)^2 = 1,5^2 = 2,25$. (2 pts)

(b) Quel résultat obtient-on en choisissant $0,5$ comme nombre de départ.
$(0,5 + 3)^2 = 3,5^2 = 12,25$. (3 pts)

(c) Soit x le nombre de départ. Ce programme est donné par l'expression littérale suivante :
$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2+3x+3x+9 = x^2+6x+9$. (3 pts, 1 pt si l'expression n'est pas développée et réduite)

3. Pour déterminer pour quelles valeurs de x les deux programmes donnent le même résultat. il suffit de résoudre cette équation : (4 pts)

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &= 2x(2x+1)+9 \ \ (1pt) \quad (1pts) \\ x^2+6x+9 &= 4x^2+2x+9 \\ 3x^2-4x &= 0 \\ x(3x-4) &= 0 \ \ (1pt) \end{aligned}$$

Ainsi, les deux programmes donnent le même résultat quand le nombre de départ est égal à 0 ou $\frac{4}{3}$. (2 pt)

<u>Exercice 2 :</u> (20 points)

On considère l'expression suivante :

$$A = (5x-1)^2 - (5x-1)(3x+2).$$

1. Développement et réduction : (5 pts, dont 1 pt pour chaque développement, 1 pt chaque réduction et 1 pt pour le résultat final)

$$\begin{aligned} A &= (5x-1)^2 - (5x-1)(3x+2) \\ &= (5x-1)(5x-1) - (5x-1)(3x+2) \\ &= [5x \times 5x + 5x \times (-1) + (-1) \times 5x + (-1) \times (-1)] - [5x \times 3x + 5x \times 2 + (-1) \times 3x + (-1) \times 2] \\ &= [25x^2 - 5x - 5x + 1] - [15x^2 + 10x - 3x - 2] \\ &= [25x^2 - 10x + 1] - [15x^2 + 7x - 2] \\ &= 25x^2 - 10x + 1 - 15x^2 - 7x + 2 \\ &= 10x^2 - 17x + 3. \end{aligned}$$

2. Factorisation : (5pts)

$$\begin{aligned} A &= (5x-1)^2 - (5x-1)(3x+2) \\ &= (5x-1)(5x-1) - (5x-1)(3x+2) \\ &= (5x-1)[(5x-1) - (3x+2)] \\ &= (5x-1)[5x-1-3x-2] \\ &= (5x-1)(2x-3). \end{aligned}$$

3. Quand $x = \frac{1}{5}$, (5 pts)

$$\begin{aligned} A &= (5 \times \frac{1}{5} - 1)^2 - (5 \times \frac{1}{5} - 1)(3x+2) \\ &= (1-1)^2 - (1-1)(3 \times \frac{1}{5} + 2) \ \ (2pt) \\ &= 0^2 - 0 \times (\frac{1}{5} + 2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

4. Résoudre l'équation $(5x-1)(2x-3) = 0$. (5 pts)
Un produit est nul si au moins l'un de ses facteurs est nul.
Ainsi, $5x-1 = 0$ ou $2x-3 = 0$ (dont 1 pt)
$5x-1+1 = 0+1$ ou $2x-3+3 = 0+3$
$5x = 1$ ou $2x = 3$
$\frac{5x}{5} = \frac{1}{5}$ ou $\frac{2x}{2} = \frac{3}{2}$

$x = \frac{1}{5}$ ou $x = \frac{3}{2}$.
$\frac{1}{5}$ et $\frac{3}{2}$ sont les deux solutions de cette équation.

Exercice 3 : (20 points)

Partie 1 : Dans cette première partie, on lance un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6, puis on note le numéro de la face du dessus.

1. Donner sans justification les issues possibles.(2 pts)
   Les issues sont 1, 2, 3, 4, 5, 6.
2. Quelle est la probabilité de l'événement A : « On obtient 2 » ? (2 pts)
   $P(A) = \frac{1}{6}$.
3. Quelle est la probabilité de l'événement B : « On obtient un nombre impair » ? (2 pts)
   Il y a 3 nombres impairs (ou pairs). Donc, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Partie 2 : Dans cette deuxième partie, on lance simultanément deux dés bien équilibrés à six faces, un rouge et un vert. On appelle « score » la somme des numéros obtenus sur chaque dé.

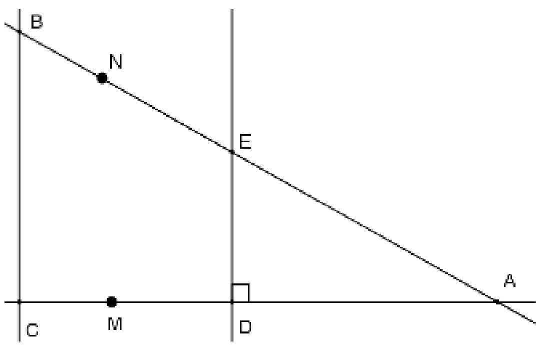
1. Quelle est la probabilité de l'événement C : « le score est 13 » ? Comment appelle-t-on un tel événement ? (4 pts)
   La plus grande somme possible étant 12, l'évènement est impossible de probabilité nulle.
2. (a) Reproduire le tableau à double entrée donné ci-contre et remplir chaque case avec la somme des numéros obtenus sur chaque dé. Compléter, sans justifier. (4 pts)
   (b) Donner la liste des scores possibles. (2 pts)
   Les scores possibles sont : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, soit 11 scores différents possibles.
3. (a) Déterminer la probabilité de l'événement D : « le score est 10 »(2 pts) .
   Il y a $6 \times 6 = 36$ issues possibles.
   On a $10 = 4+6 = 5+5 = 6+4$: 3 issues, donc $P(D) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.
   (b) Déterminer la probabilité de l'événement E : « le score est un multiple de 4 ». (2 pts)
   $P(E) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Dé vert / Dé rouge	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Exercice : 4 (20 points)

Le schéma ci-dessous montre le profil d'un tremplin de saut à ski.

L'unité de longueur est le mètre.



- Les points C, D et A sont alignés.
- Les points B, E et A sont alignés.
- (DE) $\perp$ (AD).
- AB = 6,25 ; AC = 5 ; BC = 3,75 ; AD = 3,2.
- M $\in$ [AC] et N $\in$ [AB] tels que AM = 4 et AN = 5.

La figure n'est pas en vraie grandeur.

1. (a) Montrer que le triangle ABC est rectangle. Préciser en quel point. (5 pts)
   Vérifions que : $AB^2 = BC^2 + AC^2$. 1 pt

D'une part : $AB^2 = 6{,}25^2 = 39{,}0625$. 1 pt
D'autre part : $BC^2 + AC^2 = 3{,}75^2 + 5^2 = 39{,}0625$. 1 pt
Alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en C. 2 pts (1 pt de moins si l'élève ne précise pas en quel point).

(b) En déduire que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
Les deux droites (BC) et (DE) sont parallèles car elles sont perpendiculaires à une même droite. 3 pts

2. Calculer DE. (6 pts)
On sait que :
Les deux droites (BC) et (DE) sont parallèles. 1 pt
Les deux droites (AB) et (AC) sont sécantes en A. 1 pt
Alors d'après la propriété de Thalès on a : 1 pt

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC}$$
$$\frac{3{,}2}{5} = \frac{AE}{6{,}25} = \frac{DE}{3{,}75}$$

Donc, $DE = \frac{3{,}2\times 3{,}75}{5} = 2{,}4\ m$. (2 pts)

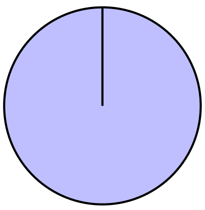
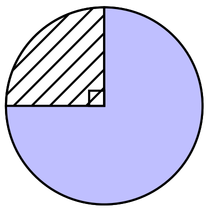
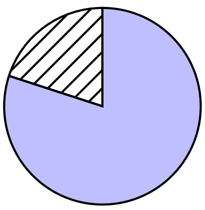
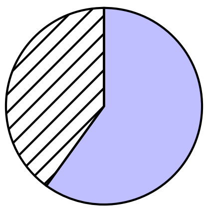
3. Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier. (6 pts)
On sait que :
Les deux droites (AB) et (AC) sont sécantes en A.
Les points A ; M ; C et A ; N ; B sont alignés dans le même ordre. 1 pt
Vérifions que : $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$. 1 pt
D'une part : $\frac{AM}{AC} = \frac{4}{5}$. 1 pt
D'autre part : $\frac{AN}{AB} = \frac{5}{6{,}25} = \frac{4}{5}$. 1 pt
L'égalité est verifiée, alors d'après la réciproque de la propriété de Thalès les deux droites (DE) et (MN) sont parallèles.(2 pts)

<u>Exercice 5 :</u> (20 points)

Une station de ski compte 30 pistes. Ces pistes de ski sont soit vertes, soit bleues, soit rouges, soit noires. La couleur de la piste définit son niveau de difficulté pour skier.

Chaque piste de ski peut être soit ouverte, soit fermée.

Sur le site internet de la station de ski, on a pu trouver les informations suivantes :

Lundi 17 février 2020	
Pistes vertes Les 7 pistes vertes sont toutes ouvertes. 	**Pistes bleues** Nombre de pistes bleues : 8 
Pistes rouges Parmi les 10 pistes rouges, 8 pistes rouges sont ouvertes. 	**Pistes noires** Parmi les 5 pistes noires, 3 pistes noires sont ouvertes. 
Information : Pistes fermées	Pistes ouvertes

1. Il y a deux pistes rouges fermées, le lundi 17 février 2020. En effet, $10 - 8 = 2$. (3 pts)
2. Il y a six pistes bleues ouvertes le lundi 17 février 2020. En effet, $8 \times \frac{3}{4} = 6$. (3 pts)

3. Le pourcentage de pistes noires ouvertes le lundi 17 février 2020, est égal 60 %. En effet, $\dfrac{3}{5} = 0,6$.. (3 pts)

4. Le mercredi 19 février 2020, la nouvelle répartition affichée sur le site internet est la suivante :

Pistes vertes	**Pistes bleues**	**Pistes rouges**	**Pistes noires**
Nombre de pistes : 7 Nombre de pistes ouvertes : 5	Nombre de pistes : 8 Nombre de pistes ouvertes : 4	Nombre de pistes : 10 Nombre de pistes ouvertes : 3	Nombre de pistes : 5 Nombre de pistes ouvertes : 1

   Sur le site de la station on peut lire :

   « Votre forfait du jour est remboursé si plus de 50 % des pistes de la station sont fermées. »

   Une cliente demande le remboursement de son forfait du jour du mercredi 19 février 2020.

   Il y a 30 pistes dans cette station de ski, dont 17 fermées le mercredi 19 février 2020.

   Ainsi le pourcentage de piste fermées est d'environ 56,7%. En effet, $\dfrac{17}{30} \approx 0,567$. (4 pts)

   C'est un pourcentage supérieur à 50%, la cliente peut demander un remboursement.

5. On a mesuré les hauteurs maximales de neige dans la station, exprimées en centimètre, pour chaque mois, de novembre 2018 à mars 2019.

   On saisit ces mesures dans une feuille de calcul dont voici une copie d'écran :

	A	B	C	D	E	F	G
1		Nov.	Déc.	Janvier	Février	Mars	Moyenne
2	Saison 2018-2019	90	120	130	120	75	107
3	Saison 2019-2020	105	130	115	140	60	

   (a) La formule à saisir dans la cellule G2, est : =MOYENNE(B2 :F2). (3 pts)

   (b) La moyenne des cinq hauteurs maximales de neige de la saison 2019-2020 est égale à :
   $\dfrac{105+130+115+140+60}{5} = \dfrac{550}{5} = 110$. (2 pts)
   Or, $110 > 107$. Donc la moyenne des cinq hauteurs maximales de neige de la saison 2019-2020 est bel et bien supérieure à celle de la saison 2018-2019. (2 pts)