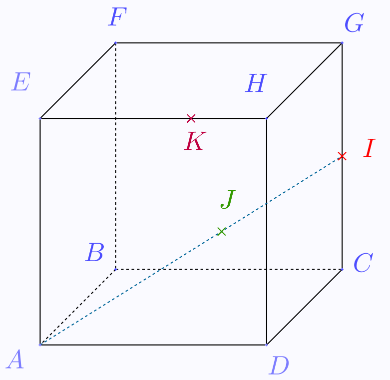
Corrigés

Série d'exercices — Classe : Tle Spé Maths — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

On considère le cube ABCDEFGH ci-après.



Soit I le milieu de [GC], soit J le point défini par : $\overrightarrow{AJ} = x\overrightarrow{AI}$, où $0 \leqslant x \leqslant 1$, et soit K le point défini par $\overrightarrow{EK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{CJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{KJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
4. Exprimer $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Exercice n°2

On reprend le cube de l'exercice précédent. On prend $x = \dfrac{2}{5}$.

On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Trouver une représentation paramétrique des plans :

1. (AID)
2. (JCD)
3. (KBD)
4. (IJK).

Exercice n°3

L'espace est muni d'un repère $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La droite $\mathcal{D}$ passe par le point A de coordonnées $(2\,; -1\,; 1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(2\,; 2\,; 1)$.

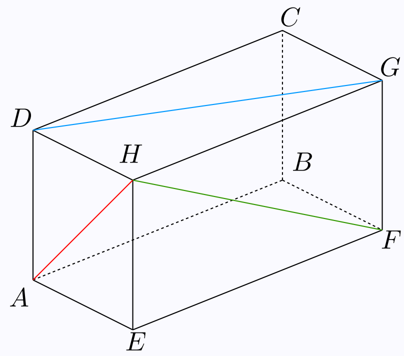
$\mathcal{P}$ est le plan parallèle à $\mathcal{D}$, passant par les points $B(0\,; 1\,; 2)$ et $C(-2\,; 3\,; 2)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.
2. Déterminer un repère du plan $\mathcal{P}$ et en déduire une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.
3. Le plan $\mathcal{P}'$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2m + n + 5 \\ y = 2m + 1 \\ z = m + n - 2 \end{cases} \quad \text{avec } m \text{ et } n \text{ dans } \mathbb{R}$$

est-il parallèle au plan $\mathcal{P}$?

Exercice n°4



$ABCDEFGH$ est un pavé droit.

Démontrer que les plans (AFH) et (BDG) sont parallèles.

Exercice n°5

Dans chacune des questions suivantes, déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1. $A(0; 2; -1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. $A(-3; 1; 5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
3. $A(2; -3; 4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice n°6

Soient $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques respectives :

$$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}t \\ y = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x = \frac{9}{5} + \frac{6}{5}t' \\ y = t' \\ z = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont confondues.

Exercice n°7

Soient $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques respectives :

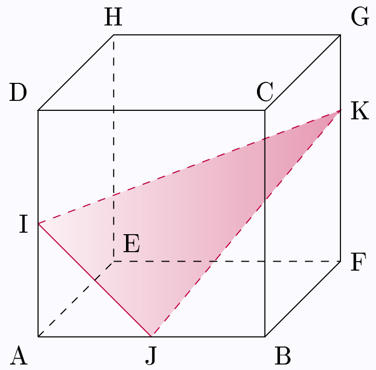
$$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 7 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x = -8 - 3t' \\ y = 5 + t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont sécantes et donner les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice n°8

On considère le cube ABCDEFGH suivant :



I et J sont les milieux respectifs des segments [AD] et [AB].
On définit les points K et L par les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{\mathrm{GK}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{GF}}; \qquad \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AD}.$$

1. Justifier que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ forment une base du plan (IJK).
2. Montrer que $\overrightarrow{IL}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.
   Interpréter ce résultat.
3. Le milieu de $[AG]$ appartient-il au plan (IJK) ? Justifier.

Exercice n°9

Soient A, B, C et D quatre points quelconques de l'espace.

1. Montrer que pour tous réels α, β et γ tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, il existe un unique point G tel que :
   $$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$
   Ce point est alors appelé *barycentre* du système $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$, et on note :
   $$G = \mathrm{bar}\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}.$$
   Cette définition se généralise à n points, $n \geqslant 1$.
2. Justifier que G appartient au plan (ABC).
3. Montrer que :
   $$\begin{cases} H = \mathrm{bar}\{(A;\alpha),(B;\beta\} \\ G = \{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\} \end{cases}$$
   $$\Longleftrightarrow$$
   $$G = \mathrm{bar}\{(H;\alpha+\beta),(C;\gamma)\}.$$

Exercice n°10

Soient $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de représentations paramétriques respectives :

$$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -4 - 2t' \\ z = 1 + t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Sont-elles parallèles ? Sont-elles sécantes ?

Exercice n°11

Dans un repère orthonormé $(0; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$, on considère les points suivants :

$$\mathrm{A}(2;-1;0); \mathrm{B}(-1;1;1) \qquad \mathrm{C}(3;-2;-1)$$

1. Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer alors une représentation paramétrique du plan (ABC).
3. Soit E$(0;-1;1)$.
   (a) Vérifier que E n'appartient pas au plan (ABC).
   (b) On considère la droite passant par E et orthogonale au plan (ABC). On pose H$(a;b;c)$ son point d'intersection avec le plan (ABC). Déterminer les valeurs de a, b et c.
   (c) Déterminer alors une équation paramétrique de la droite (EH).

Exercice n°12

$ABCD$ est un tétraèdre. I et J sont les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CD]$.
E et F sont deux points définis par les égalités :

$$-2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{0} \qquad ; \qquad -2\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{0}.$$

1. Démontrer que les point E, F, I, J sont coplanaires.
2. La droite (AD) coupe le plan (EFI) en K.
   (a) Démontrer que les points E, I, K sont alignés et que les points F, J, K le sont aussi.
   (b) Démontrer que $\overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AD}$.

Exercice n°13

On donne ci-dessous une équation cartésienne de deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.
Pour chaque question, déterminer une représentation paramétrique de l'intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

1. $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 3x - y + z = 7 \\ (\mathcal{P}_2) : -x + 3y + 2z = 1 \end{cases}.$
2. $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : x + y + z = 1 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y + z = 4 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 2x - 2y + 3z = 4 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y - 3z = 2 \end{cases}$.

Exercice n°14

On donne ci-dessous une équation cartésienne de deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.
Pour chaque question, dire si $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont orthogonaux

1. $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 3x - y + z = 7 \\ (\mathcal{P}_2) : -x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : x + y + z = 1 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$
3. $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 2x - 2y + 3z = 4 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y - 3z = 2 \end{cases}$

Exercice n°15

On considère deux plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations cartésiennes respectives :

$$(\mathcal{P}_1) \ : \ 3x + t^2y + (1-t)z - 5 = 0;$$

$$(\mathcal{P}_2) \ : \ t^2x + (1+t)y - 3z + 1 = 0,$$

où t est un réel.
Déterminer les valeurs éventuelles de t pour lesquelles les deux plans sont orthogonaux.

Exercice n°16

Pour chacune des questions suivantes, calculer la distance entre le point A et le plan $(\mathcal{P})$.

1. $(\mathcal{P}) \ : \ -3x + 5y + z = 1 \,;\ A(-3; 2; 1)$.
2. $(\mathcal{P}) \ : \ 5x - y + 3z - 2 = 0 \,;\ A(2; 2; -2)$.

Exercice n°17

On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne :

$$-2x + 7y + 3z - 1 = 0.$$

Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre $A(-1; 2; -3)$ tangente à $(\mathcal{P})$.
On rappelle qu'une sphère de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon R a pour équation cartésienne :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Exercice n°18

1. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point $A(1; -2; 3)$ et parallèle au plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $2x + 5y - 3z = 7$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point $A(-1; -1; 1)$ et orthogonal au plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $x + y - z = 1$.

Exercice n°19

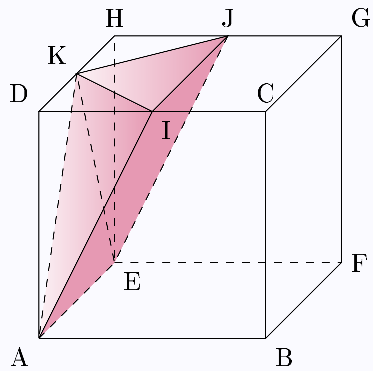
Donner les coordonnées de l'éventuel point d'intersection de la droite (d) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

et du plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne $2x - 3y + z = 2$.

Exercice n°20

Soit ABCDEFGH un cube comme représenté ci-dessous.



On place les points I, J et K respectivement au milieu des côtés [DC], [GH] et [DH]. On fixe le repère $(A; AB, AD, AE)$.

1. Montrer que le vecteur $u\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (AEJI).
2. En déduire une équation cartésienne du plan (AEJI).
3. On admet que la distance du point K au plan (AEJI) est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
   En déduire le volume de la pyramide AEJIK.
4. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, perpendiculaire au plan (AEJI) et passant par K.
   En déduire les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan (AEJI).

Exercice n°21

Trouver la représentation paramétrique de l'intersection des plans d'équations cartésiennes respectives :

$$(\mathcal{P}) \ : \ 2x - y - z = 1 \quad ; \quad (\mathcal{Q}) \ : \ -x + 3y + z = 2.$$

Exercice n°22

En vous inspirant par exemple de la méthode utilisée dans la correction de l'exercice précédent, déterminer une représentation paramétrique de l'intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$.

1. $(\mathcal{P}) \ : \ -x + y + z = 2$ et $(\mathcal{Q}) \ : \ 4x - 3y + 5z = 1$.
2. $(\mathcal{P}) \ : \ 2x - y + 3z = 1$ et $(\mathcal{Q}) \ : \ -3x + 2y - 7z = 1$.