

## Série d'exercices

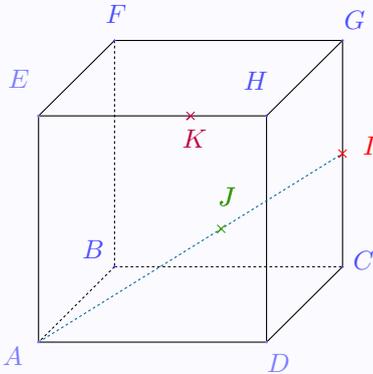
Corrigés

Classe : Tle Spé Maths

Lycée : Evariste Galois

## Exercice n°1

On considère le cube ABCDEFGH ci-après.



Soit I le milieu de [GC], soit J le point défini par :  $\vec{AJ} = x\vec{AI}$ , où  $0 \leq x \leq 1$ , et soit K le point défini par  $\vec{EK} = \frac{2}{3}\vec{EH}$ .

1. Exprimer  $\vec{AI}$  en fonction de  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  et  $\vec{AE}$ .
2. Exprimer  $\vec{CJ}$  en fonction de  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  et  $\vec{AE}$ .
3. Exprimer  $\vec{KJ}$  en fonction de  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  et  $\vec{AE}$ .
4. Exprimer  $\vec{IK}$  en fonction de  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  et  $\vec{AE}$ .

## Exercice n°2

On reprend le cube de l'exercice précédent. On prend  $x = \frac{2}{5}$ .

On se place dans le repère  $(A; \vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AE})$ .

Trouver une représentation paramétrique des plans :

1. (AID)
2. (JCD)
3. (KBD)
4. (IJK).

## Exercice n°3

L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . La droite  $\mathcal{D}$  passe par le point A de coordonnées  $(2; -1; 1)$  et a pour vecteur directeur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(2; 2; 1)$ .

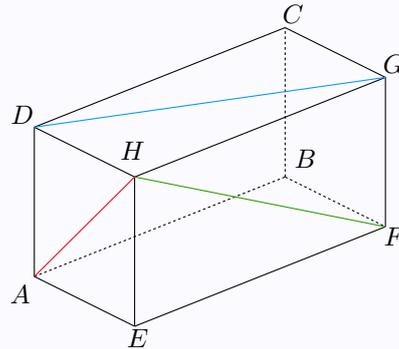
$\mathcal{P}$  est le plan parallèle à  $\mathcal{D}$ , passant par les points  $B(0; 1; 2)$  et  $C(-2; 3; 2)$ .

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$ .
2. Déterminer un repère du plan  $\mathcal{P}$  et en déduire une représentation paramétrique du plan  $\mathcal{P}$ .
3. Le plan  $\mathcal{P}'$  de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2m + n + 5 \\ y = 2m + 1 \\ z = m + n - 2 \end{cases} \text{ avec } m \text{ et } n \text{ dans } \mathbb{R}$$

est-il parallèle au plan  $\mathcal{P}$  ?

## Exercice n°4



ABCDEFGH est un pavé droit.

Démontrer que les plans (AFH) et (BDG) sont parallèles.

## Exercice n°5

Dans chacune des questions suivantes, déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$ , passant par le point A et de vecteur directeur  $\vec{u}$ .

1.  $A(0; 2; -1)$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .
2.  $A(-3; 1; 5)$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
3.  $A(2; -3; 4)$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

## Exercice n°6

Soient  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$  de représentations paramétriques respectives :

$$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}t \\ y = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x = \frac{9}{5} + \frac{6}{5}t' \\ y = t' \\ z = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$  sont confondues.

## Exercice n°7

Soient  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$  de représentations paramétriques respectives :

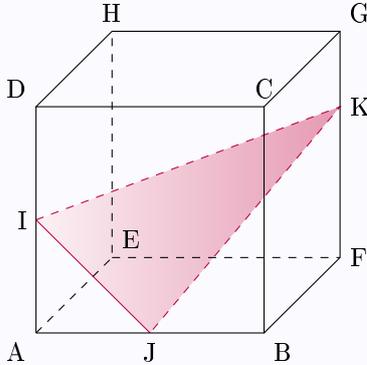
$$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 7 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x = -8 - 3t' \\ y = 5 + t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$  sont sécantes et donner les coordonnées de leur point d'intersection.

### Exercice n°8

On considère le cube ABCDEFGH suivant :



I et J sont les milieux respectifs des segments  $[AD]$  et  $[AB]$ .

On définit les points K et L par les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{GK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GF}; \quad \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AD}.$$

- Justifier que  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{IK}$  forment une base du plan  $(IJK)$ .
- Montrer que  $\overrightarrow{IL}$  est une combinaison linéaire de  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{IK}$ .  
Interpréter ce résultat.
- Le milieu de  $[AG]$  appartient-il au plan  $(IJK)$ ? Justifier.

### Exercice n°9

Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points quelconques de l'espace.

- Montrer que pour tous réels  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  tels que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ , il existe un unique point  $G$  tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Ce point est alors appelé *barycentre* du système  $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$ , et on note :

$$G = \text{bar}\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}.$$

Cette définition se généralise à  $n$  points,  $n \geq 1$ .

- Justifier que  $G$  appartient au plan  $(ABC)$ .
- Montrer que :

$$\begin{cases} H = \text{bar}\{(A; \alpha), (B; \beta)\} \\ G = \text{bar}\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$G = \text{bar}\{(H; \alpha + \beta), (C; \gamma)\}.$$

### Exercice n°10

Soient  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$  de représentations paramétriques respectives :

$$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(\mathcal{D}_2) : \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -4 - 2t' \\ z = 1 + t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Sont-elles parallèles? Sont-elles sécantes?

### Exercice n°11

Dans un repère orthonormé  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les points suivants :

$$A(2; -1; 0); B(-1; 1; 1) \quad C(3; -2; -1)$$

- Montrer que  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés.
- Déterminer alors une représentation paramétrique du plan  $(ABC)$ .
- Soit  $E(0; -1; 1)$ .
  - Vérifier que  $E$  n'appartient pas au plan  $(ABC)$ .
  - On considère la droite passant par  $E$  et orthogonale au plan  $(ABC)$ . On pose  $H(a; b; c)$  son point d'intersection avec le plan  $(ABC)$ . Déterminer les valeurs de  $a, b$  et  $c$ .
  - Déterminer alors une équation paramétrique de la droite  $(EH)$ .

### Exercice n°12

$ABCD$  est un tétraèdre.  $I$  et  $J$  sont les milieux respectifs des segments  $[BD]$  et  $[CD]$ .

$E$  et  $F$  sont deux points définis par les égalités :

$$-2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} = \vec{0} \quad ; \quad -2\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FC} = \vec{0}.$$

- Démontrer que les points  $E, F, I, J$  sont coplanaires.
- La droite  $(AD)$  coupe le plan  $(EFI)$  en  $K$ .
  - Démontrer que les points  $E, I, K$  sont alignés et que les points  $F, J, K$  le sont aussi.
  - Démontrer que  $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$ .

### Exercice n°13

On donne ci-dessous une équation cartésienne de deux plans  $(\mathcal{P}_1)$  et  $(\mathcal{P}_2)$ .

Pour chaque question, déterminer une représentation paramétrique de l'intersection de  $(\mathcal{P}_1)$  et  $(\mathcal{P}_2)$ .

- $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 3x - y + z = 7 \\ (\mathcal{P}_2) : -x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : x + y + z = 1 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$

$$3. \begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 2x - 2y + 3z = 4 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y - 3z = 2 \end{cases}$$

#### Exercice n°14

On donne ci-dessous une équation cartésienne de deux plans  $(\mathcal{P}_1)$  et  $(\mathcal{P}_2)$ .

Pour chaque question, dire si  $(\mathcal{P}_1)$  et  $(\mathcal{P}_2)$  sont orthogonaux

- $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 3x - y + z = 7 \\ (\mathcal{P}_2) : -x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : x + y + z = 1 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$
- $\begin{cases} (\mathcal{P}_1) : 2x - 2y + 3z = 4 \\ (\mathcal{P}_2) : 2x - 3y - 3z = 2 \end{cases}$

#### Exercice n°15

On considère deux plans  $(\mathcal{P}_1)$  et  $(\mathcal{P}_2)$  d'équations cartésiennes respectives :

$$(\mathcal{P}_1) : 3x + t^2y + (1-t)z - 5 = 0;$$

$$(\mathcal{P}_2) : t^2x + (1+t)y - 3z + 1 = 0,$$

où  $t$  est un réel.

Déterminer les valeurs éventuelles de  $t$  pour lesquelles les deux plans sont orthogonaux.

#### Exercice n°16

Pour chacune des questions suivantes, calculer la distance entre le point  $A$  et le plan  $(\mathcal{P})$ .

- $(\mathcal{P}) : -3x + 5y + z = 1; A(-3; 2; 1)$ .
- $(\mathcal{P}) : 5x - y + 3z - 2 = 0; A(2; 2; -2)$ .

#### Exercice n°17

On considère le plan  $(\mathcal{P})$  d'équation cartésienne :

$$-2x + 7y + 3z - 1 = 0.$$

Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre  $A(-1; 2; -3)$  tangente à  $(\mathcal{P})$ .

On rappelle qu'une sphère de centre  $\Omega(a; b; c)$  et de rayon  $R$  a pour équation cartésienne :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

#### Exercice n°18

- Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point  $A(1; -2; 3)$  et parallèle au plan  $(\mathcal{P})$  d'équation :  $2x + 5y - 3z = 7$ .
- Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point  $A(-1; -1; 1)$  et orthogonal au plan  $(\mathcal{P})$  d'équation :  $x + y - z = 1$ .

#### Exercice n°19

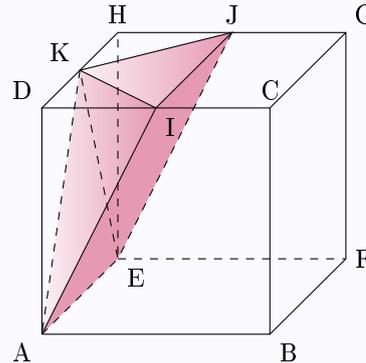
Donner les coordonnées de l'éventuel point d'intersection de la droite  $(d)$  de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

et du plan  $(\mathcal{P})$  d'équation cartésienne  $2x - 3y + z = 2$ .

#### Exercice n°20

Soit ABCDEFGH un cube comme représenté ci-dessous.



On place les points I, J et K respectivement au milieu des côtés  $[DC]$ ,  $[GH]$  et  $[DH]$ . On fixe le repère  $(A; AB, AD, AE)$ .

- Montrer que le vecteur  $u \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan  $(AEJI)$ .
- En déduire une équation cartésienne du plan  $(AEJI)$ .
- On admet que la distance du point K au plan  $(AEJI)$  est égale à  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ . En déduire le volume de la pyramide AEJIK.
- Donner une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$ , perpendiculaire au plan  $(AEJI)$  et passant par K. En déduire les coordonnées du point d'intersection de  $\mathcal{D}$  avec le plan  $(AEJI)$ .

#### Exercice n°21

Trouver la représentation paramétrique de l'intersection des plans d'équations cartésiennes respectives :

$$(\mathcal{P}) : 2x - y - z = 1 \quad ; \quad (\mathcal{Q}) : -x + 3y + z = 2.$$

#### Exercice n°22

En vous inspirant par exemple de la méthode utilisée dans la correction de l'exercice précédent, déterminer une représentation paramétrique de l'intersection des plans  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{Q})$ .

- $(\mathcal{P}) : -x + y + z = 2$  et  $(\mathcal{Q}) : 4x - 3y + 5z = 1$ .
- $(\mathcal{P}) : 2x - y + 3z = 1$  et  $(\mathcal{Q}) : -3x + 2y - 7z = 1$ .