Corrigés

Série d'exercices — Classe : Tle Spé Maths — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \big(\cos x + \sin x\big)^2 + \big(\cos x - \sin x\big)^2.$$

Développons $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \big(\cos x + \sin x\big)^2 + \big(\cos x - \sin x\big)^2 \\ &= \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x \\ &\qquad - 2\cos x \sin x + \sin^2 x \\ &= 2(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= 2 \times 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Exercice n°2

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

1. $f(x)$ est défini quand $1 + \sin x \neq 0$.
   Or, $1 + \sin x = 0 \iff \sin x = -1 \iff x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
   Ainsi, le domaine de définition de f est $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$.
2. On sait que $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Par conséquent, $f(x + 2\pi) = f(x)$.
   Ainsi, f est 2π-périodique.
3. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = \cos x$ et $v(x) = 1 + \sin x$.
   Ainsi, f' est de la forme $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, avec $u'(x) = -\sin x$ et $v'(x) = \cos x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1 + \sin x)^2} \\ f'(x) &= -\frac{\sin x + 1}{(1 + \sin x)^2}, \end{aligned}$$

Or, pour tout réel $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \sin x + 1 \leqslant 2$.
De plus, $(1 + \sin x)^2 > 0$ donc $f'(x) < 0$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[$.
Ainsi, f est strictement décroissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice n°3

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos^3 x \cos(3x).$$

— Montrons d'abord que f est π-périodique.

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= \big[\cos(x + \pi)\big]^3 \cos\big(3(x + \pi)\big) \\ &= \big[-\cos x\big]^3 \cos(3x + 3\pi) \\ &= -\cos^3 x \cos(3x + \pi) \\ &= -\cos^3 x\big(-\cos(3x)\big) \\ &= \cos^3 x \cos(3x) \\ f(x + \pi) &= f(x). \end{aligned}$$

Donc f est π-périodique.
On peut donc réduire l'intervalle d'étude à un intervalle d'amplitude π, par exemple $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

— Montrons que f est paire. D'abord, le domaine de définition de f est centré en 0.
De plus,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \big[\cos(-x)\big]^3 \cos(-3x) \\ &= \big[\cos x\big]^3 \cos(3x) \\ &= \cos^3 x \cos(3x) \\ f(-x) &= f(x). \end{aligned}$$

Ainsi, f est paire.

Exercice n°4

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^3 x \cos(3x).$$

— Montrons d'abord que f est π-périodique.

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= \big[\sin(x + \pi)\big]^3 \cos\big[3(x + \pi)\big] \\ &= \big[-\sin x\big]^3 \cos(3x + 3\pi) \\ &= -\sin^3 x \cos(3x + \pi) \\ &= -\sin^3 x\big[-\cos(3x)\big] \\ &= \sin^3 x \cos(3x) \\ f(x + \pi) &= f(x). \end{aligned}$$

La fonction f est donc π-périodique ; on peut donc restreindre l'intervalle d'étude de f à un intervalle d'amplitude π, par exemple $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

— Montrons que f est impaire. Le domaine de définition de f est centré en 0. De plus,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \big[\sin(-x)\big]^3 \cos(-3x) \\ &= \big[-\sin x\big]^3 \cos(3x) \\ &= -\sin^3 x \cos(3x) \\ f(-x) &= -f(x). \end{aligned}$$

La fonction f est donc impaire ; on peut donc réduire l'intervalle d'étude précédent à sa moitié, donc à $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice n°5

On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$ par :

$$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}.$$

1. f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

   $u(x)=\sin x+\cos x$

   $u'(x)=\cos x-\sin x$

   $v(x)=\sin x-\cos x$

   $v'(x)=\cos x+\sin x$

   Ainsi,

   $$\begin{aligned}
   f'(x) &= \frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}\\
   &= \frac{-(\sin x-\cos x)^2-(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)^2}\\
   &= \frac{-\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x-\sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}\\
   &= \frac{-2\sin^2 x-2\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}\\
   &= \frac{-2(\cos^2 x+\sin^2 x)}{(\sin x-\cos x)^2}\\
   &= \frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2} \text{ car } \cos^2 x+\sin^2 x=1.
   \end{aligned}$$

2. On en déduit que $f'(x)<0$ sur $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$ (car $-2<0$ et $(\sin x-\cos x)^2>0$).

   Ainsi, f est strictement décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$.

Exercice n°6

En sciences physiques, notamment en électricité ou en acoustique, on rencontre souvent des fonctions f de la forme :

$$f(t)=a\sin(\omega t+\varphi)$$

où φ est appelé la *phase* et ω, la *pulsation*.
$f(t)=a\sin(\omega t+\varphi)$ donc :

$$f'(t)=a\times\omega\cos(\omega t+\varphi).$$

En effet, on sait que la dérivée de $x\mapsto\sin x$ est $x\mapsto\cos x$.
De plus, on sait que la dérivée de $f(at+b)$ est $af'(at+b)$.

Sur le même principe, on a alors :

$$f''(t)=a\omega\times(-\omega\sin(\omega t+\varphi)=-a\omega\sin(\omega t+\varphi)=-\omega^2 f(t).$$

Ainsi,

$$f''(t)+\omega^2 f(t)=-\omega^2 f(t)+\omega^2 f(t)=0.$$

Exercice n°7

On considère la fonction $f(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$.

1. $f'(x)=-\sin x+x$ et $f''(x)=-\cos x+1$.
2. On sait que pour tout réel x,

   $$-1\leqslant-\cos x\leqslant1$$

   donc, en ajoutant 1 à chaque membre de cet encadrement, on a :

   $$0\leqslant f''(x)\leqslant 2.$$

   Donc $f''(x)\geqslant0$ sur $\mathbb{R}$ ce qui signifie que f' est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $f'(0)=-\sin 0+0=0$. Or, f' est croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘		0	↗	

$f(0)=\cos 0-1+\frac{1}{2}\times0^2=1-1+0=0.$

4. Des variations de f, on déduit que $f(x)\geqslant0$ sur $\mathbb{R}$, dont :

   $$\cos x-1+\frac{1}{2}x^2\geqslant0$$

   soit :

   $$\boxed{\cos x\geqslant1-\frac{1}{2}x^2}$$

5. Considérons la fonction $g(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4$.

   Alors, $g'(x)=-\sin x+x-\frac{1}{6}x^3$ et $g''(x)=-\cos x+1-\frac{1}{2}x^2=-f(x)$.
   Ainsi, pour tout réel x, $g''(x)\leqslant0$, ce qui signifie que g' est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   $g'(0)=-\sin 0+0=0$ d'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	↗		0	↘	

Par conséquent, $g(x)\leqslant0$ sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que :

$$\cos x\leqslant1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4.$$

6. De ce qui vient d'être fait, on peut écrire :

   $$\forall x\in,\quad 1-\frac{x^2}{2}\leqslant\cos x\leqslant1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}.$$

   En prenant $x=\frac{\pi}{50}$, cela donne :

   $$1-\frac{\pi^2}{5000}\leqslant\cos\frac{\pi}{50}\leqslant1-\frac{\pi^2}{5000}+\frac{\pi^4}{150000000}.$$

   Puisque $\frac{\pi^4}{150000000}<10^{-6}$, on peut alors considérer qu'une valeur approchée de $\cos\frac{\pi}{50}$ à 10^{-6} près est $1-\frac{\pi^2}{5000}$

Exercice n°8

On souhaite étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \cos u_n.$$

1. Écrire un programme Python permettant de calculer tous les termes jusqu'à u_{30}.

   On peut ainsi conjecturer que la suite converge.
2. Écrire un programme Python permettant de calculer tous les termes jusqu'à ce que la différence entre deux termes consécutifs devienne inférieure ou égale à 10^{-5}, en affichant l'indice de chaque terme.
3. La suite semble-t-elle monotone ?

   On pose pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{2n}.$$

4. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
5. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos(\cos x)$ est croissante sur $]0; 1]$.
6. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < v_{n+1} < v_n \leqslant 1$.
7. Déduire alors que la suite converge. Donner alors une valeur approchée de sa limite à 10^{-6} près.