Série d'exercices

Corrigés — Classe : Tle Spé Maths — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \big(\cos x + \sin x\big)^2 + \big(\cos x - \sin x\big)^2.$$

Montrer que f est une fonction constante.

Exercice n°2

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est périodique.
3. Déterminer $f'(x)$, puis en déduire le sens de variations de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice n°3

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos^3 x \cos(3x).$$

Montrer que f est π-périodique et paire.

Exercice n°4

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^3 x \cos(3x).$$

Montrer que f est π-périodique et impaire.

Exercice n°5

On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire alors le sens de variations de f.

Exercice n°6

En sciences physiques, notamment en électricité ou en acoustique, on rencontre souvent des fonctions f de la forme :

$$f(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$$

où φ est appelé la *phase* et ω, la *pulsation*.
Montrer que :

$$f'' + \omega^2 f = 0.$$

Exercice n°7

On considère la fonction $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$.

1. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
2. Montrer que $f''(x) \geqslant 0$ pour tout réel x et en déduire les variations de la fonction f' sur .
3. Calculer $f'(0)$ et en déduire les variations de f sur .
4. Montrer alors que pour tout réel x, $\cos x \geqslant 1 - \frac{1}{2}x^2$.
5. En considérant une autre fonction $g(x)$, montrer de la même façon que pour tout réel x, $\cos x \leqslant 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$.
6. Donner un encadrement de $\cos\frac{\pi}{50}$. Sachant que $\frac{\pi^4}{150000000} < 10^{-6}$, que cela vous inspire-t-il pour la valeur approchée de $\cos\frac{\pi}{50}$ à 10^{-6} près ?

Exercice n°8

On souhaite étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \cos u_n.$$

1. Écrire un programme Python permettant de calculer tous les termes jusqu'à u_{30}.
   On peut ainsi conjecturer que la suite converge.
2. Écrire un programme Python permettant de calculer tous les termes jusqu'à ce que la différence entre deux termes consécutifs devienne inférieure ou égale à 10^{-5}, en affichant l'indice de chaque terme.
3. La suite semble-t-elle monotone ?

   On pose pour tout entier naturel n :

   $$v_n = u_{2n}.$$

4. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
5. Montrer que la fonction $f \;:\; x \mapsto \cos(\cos x)$ est croissante sur $]0; 1]$.
6. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < v_{n+1} < v_n \leqslant 1$.
7. Déduire alors que la suite converge. Donner alors une valeur approchée de sa limite à 10^{-6} près.