1

Suites

Série d'exercices

Corrigés — Classe : Terminale Maths Spé — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

On considère la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2.$$

Montrer par récurrence que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice n°2

Montrer par récurrence l'inégalité suivante, appelée *inégalité de Bernoulli* :

$$\forall x \geqslant -1,\ x \neq 0, \forall n > 1,\ (1+x)^n > 1 + nx.$$

Exercice n°3

Démontrer que pour tout entier naturel n, $5^n - 1$ est divisible par 4.

Exercice n°4

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.

Exercice n°5

Démontrer que pour tout entier naturel n, $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

Exercice n°6

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que $n+1$ est un diviseur de n^3+n^2+n+1.
2. En déduire deux diviseurs de $1\,111$.

Exercice n°7

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, $n! > n^2$.
Il faudra faire preuve d'initiative dans cet exercice.
On rappelle que $n! = 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1) \times n$.

Exercice n°8

Montrer par récurrence l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a;b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

appelée *formule du binôme de Newton.*

Aide : on pourra s'aider de la formule suivante :

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Exercice n°9

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 sous forme de fraction irréductible.
2. Conjecturer la formule qui donne u_n puis la montrer par récurrence.

Exercice n°10

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Étudier la monotonie de (u_n).
2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n^2$.
   (b) Déterminer alors la limite de (u_n).
3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n puis démontrer la propriété conjecturée.

Exercice n°11

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f :

x	0	5
$f(x)$	$1 \nearrow$	5

On définit alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et par l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 5$.

Exercice n°12

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots$$

où $k! = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (k-1) \times k$.

1. Montrer que pour tout entier naturel k,

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

2. En déduire que pour tout entier naturel n,

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

3. Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice n°13

Déterminer la limite des suites suivantes.

1. $a_n = \dfrac{3n+2}{4n-1}$.
2. $b_n = \dfrac{n^2-3n+1}{n+7}$.
3. $c_n = \dfrac{3n-7}{n^2+1}$.

Exercice n°14

Déterminer les limites des suites suivantes.

1. $u_n = \dfrac{n^2+3n-2}{\sqrt{n}+1}$.
2. $v_n = \sqrt{\dfrac{4n+1}{n+2}}$.
3. $w_n = \dfrac{2\sqrt{n}+n-3}{\sqrt{n}+1}$.

Exercice n°15

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ où

$$u_n = \frac{n+\cos(n)}{n^2}.$$

Exercice n°16

Soit $a \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ dans les cas suivants.

1. $u_n = \dfrac{n+\sin(n)}{n+\cos(n)}$.
2. $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \sin^p(a)$.

Exercice n°17

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+\sin(n)}{n+1}$.
2. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n-n^3}{1+n^2}$.

Exercice n°18

Dans un repère orthonormé, construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par son premier terme $u_0 = 10$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

Exercice n°19

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

1. Déterminer les variations de f sur $[0;2]$.
   Montrer alors l'implication suivante :

$$x \in [1;2] \Rightarrow f(x) \in [1;2].$$

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in [1;2]$ et que $u_n \leqslant u_{n+1}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)n \geqslant 0$ converge.
   Calculer alors sa limite.

Exercice n°20

Soit la suit (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+6}{u_n+2} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que si (u_n) converge vers un nombre ℓ, alors ℓ est racine du polynôme :

$$P(x) = x^2 + x - 6.$$

2. Déterminer les racines de P. On les notera α et β, avec $\alpha > \beta$.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera alors son premier terme et sa raison.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice n°21

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n-1}{4u_n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$.

1. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice n°22

On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2n - 1 \end{cases}$$

1. Calculer les 10 premiers termes de cette suite à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur. Que peut-on conjecturer quant au sens de variation de (u_n) ?

2. On pose $v_n = u_n - 4n + 10$.
   (a) Monter que (v_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.
   (b) En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.
   (c) On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Donner l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice n°23

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{2}{3}. \end{cases}$

1. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (v_n) par : $v_n = u_n + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer le réel λ tel que la suite soit géométrique.
2. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice n°24

On sait tous qu'il y a des années à coccinelles et d'autres sans !
On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = kx(1-x),$$

k étant un paramètre réel qui dépend de l'environnement.
Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des coccinelles reste inférieur à un million. L'effectif des coccinelles, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n avec u_n compris entre 0 et 1. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300 000 coccinelles, on prendra $u_0 = 0{,}3$.
On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus.
Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k.

1. Justifier que si la suite (u_n) définie précédemment converge vers α, alors α vérifie la relation $f(\alpha) = \alpha$.
2. Supposons $u_0 = 0{,}4$ et $k = 1$.
   (a) Étudier le sens de variations de la suite (u_n).
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
   (d) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?
3. Supposons maintenant $u_0 = 0{,}3$ et $k = 1{,}8$.
   (a) Étudier les variations de la fonction f sur $[0;1]$ et montrer que $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$.
   (b) En utilisant éventuellement un raisonnement par récurrence,
      — montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$;
      — établir que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
   (d) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?

Exercice n°25

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation :

$$(E) : \qquad e^x = \frac{1}{x}$$

admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
On pose pour tout réel x :

$$f(x) = x - e^{-x}.$$

1. Démontrer que x est solution de (E) si et seulement si $f(x) = 0$.
2. Étude du signe de f.
   (a) Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.
   (c) Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.
   (d) Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0;\alpha]$.

On pose pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$:

$$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}.$$

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.
3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0;\alpha]$.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.