Série d'exercices

Corrigés — Classe : Tle Spé Maths — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

On considère 5 variables aléatoires $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant 5}$ suivant toutes la loi binomiale $\mathcal{B}(1\,000; 0{,}75)$.
Soit la variable aléatoire $S_5 = X_1 + X_2 + \cdots + X_5$.
Calculer l'espérance de S_5.

Exercice n°2

Chaque jour de la semaine, Hubert prend le train pour aller travailler. Selon les statistiques réalisées sur sa ligne,

— la probabilité que le train ait 5 minutes de retard est égale à la moitié de celle qu'il ait aucun retard ;
— la probabilité que le train ait 2 minutes de retard est égale au triple de celle qu'il ait 7 minutes de retard ;
— la probabilité qu'il ait 7 minutes de retard est égale au cinquième de celle qu'il n'ait aucun retard.

On suppose qu'il n'y a pas d'autres cas possibles.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de minutes de retard du train d'Hubert un jour pris au hasard.

1. Déterminer la loi de probabilité X.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Calculer le retard moyen du train d'Hubert sur un échantillon de 20 jours ouvrés (donc sur un mois).

Exercice n°3

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance $E(X) = 9$ à valeurs positives. Alors, selon l'inégalité de Markov, $P(X \geqslant 10) \leqslant \dfrac{1}{10}$.
2. Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance $E(X) = 7$ et de variance $\sigma^2 = 9$. Alors, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P\big(|X-7| \geqslant 18\big) < 0{,}028$.
3. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Si la carte est un roi, on gagne 1 point, sinon on ne gagne rien. On répète cette expérience 1 000 fois.

   La probabilité que, à l'issue des 1 000 expériences, la différence entre le gain moyen de points et 125 soit plus grande que 5 est inférieure ou égale à 0,001.

Exercice n°4

On jette 3 600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720 à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice n°5

On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50.

1. Peut-on estimer que la probabilité que la production de la semaine prochaine dépasse 75 pièces ?
2. On sait, de plus, que la variance de la production hebdomadaire est de 25. Peut-on estimer la probabilité que la production de la semaine suivante soit comprise entre 40 et 60 ?

Exercice n°6

Le nombre de pièces sortant d'une usine en une journée est une variable aléatoire d'espérance 50. On veut estimer la probabilité que la production de demain dépasse 75 pièces.

1. En utilisant l'inégalité de Markov, quelle estimation obtient-on sur cette probabilité ?
2. Que peut-on dire de plus sur cette probabilité si on sait que l'écart-type de la production quotidienne est 5 ?

Exercice n°7

Pour étudier les particules émises par une substance radioactive, on dispose d'un détecteur. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de particules qui atteignent le détecteur pendant un intervalle de temps Δt. Le nombre maximal de particules que le détecteur peut compter pendant un intervalle de temps Δt est de 10^3. On suppose que X suit une loi d'espérance et de variance égales à 10^2.
Donner une majoration de la probabilité que X dépasse 10^3.

Exercice n°8

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur un échantillon très grand et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que $\dfrac{X_n}{n}$ approche p.

1. Quelle est la loi de X_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?
2. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$
3. En déduire une condition sur n pour que $\dfrac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Exercice n°9

On lance de manière indépendante n fois un dé équilibré à six faces.
Déterminer une valeur de n pour laquelle la probabilité d'obtenir entre 0 et $\frac{n}{3}$ fois le nombre « 1 » soit supérieure à 0,99.

Exercice n°10

On souhaite démontrer l'inégalité de Markov stipulant que pour une variable aléatoire discrète d'espérance finie X à n valeurs positives,

$$\forall a > 0, \quad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$

On note :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k).$$

1. Compléter l'égalité suivante :
$E(X) = \sum_{x_k \geqslant a} \dots \quad + \quad \sum_{x_k < a} \dots$
2. Par quel nombre est minorée la deuxième somme ?
3. Montrer alors que $E(X) \geqslant aP(X \geqslant a)$, puis conclure.

Exercice n°11

On se propose dans cet exercice de démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, stipulant que si X est une variable aléatoire discrète d'espérance μ et de variance $V(X)$ alors, quel que soit le réel $\delta > 0$,

$$P\big(|X - \mu| \geqslant \delta\big) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Pour cela, on considère la variable $Y = \big[X - E(X)\big]^2$.
Appliquer l'inégalité de Markov à Y en prenant une valeur de a convenablement choisie afin de démontrer l'inégalité souhaitée.

Exercice n°12

Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que X admet une espérance $E(X) = \mu$ et une variance $V(X) = \sigma^2$. Soit $a > 0$.

1. Soit $\lambda \geqslant 0$. Démontrer que $P(X - \mu \geqslant a) = P(X - \mu + \lambda \geqslant a + \lambda)$.
2. Vérifier que $E\big((X - \mu + \lambda)^2\big) = \sigma^2 + \lambda^2$.
3. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $P(X - \mu \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(a + \lambda)^2}$. *Aide :* on pourra utiliser le fait que $P(Z \geqslant \alpha) \leqslant P(Z^2 \geqslant \alpha^2)$ pour toute variable aléatoire Z.
4. En déduire que $P\big(|X - \mu| \geqslant a\big) \leqslant \frac{2\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}$.
5. Pour quelles valeurs de a obtient-on une meilleure inégalité que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

Exercice n°13

On dispose d'une urne dans laquelle sont mises 7 boules rouges et 3 noires. On tire au hasard une boule de cette urne et on la remet dans l'urne ; si la boule choisie est noire, on gagne 1 point. Sinon, on ne gagne pas de point.
On note M_n le gain moyen de points après n répétitions indépendantes de cette expérience.
Déterminer une valeur de n pour laquelle la probabilité que la différence entre M_n et 0,3 soit supérieure à 0,1 est inférieure ou égale à 0,5.

Exercice n°14

On lance n fois un dé à 6 faces et on regarde la fréquence d'obtention de la face « 6 ».
Que peut-on dire de cette fréquence quand n devient grand ?

Exercice n°15

On considère une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ définie de la façon suivante : on part de 0 et, à chaque étape,

— on a une probabilité p de faire un pas vers la droite ;

— on a une probabilité $1 - p$ de faire un pas vers la gauche.

Autrement dit, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 1}$ indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_n = 1) = p \text{ et } P(X_n = -1) = 1 - p.$$

On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Que représente S_n dans le contexte de cet exercice ?
2. Exprimer, en fonction de p, $E(X_k)$.
3. Que vaut $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice n°16

On se propose dans cet exercice de démontrer l'inégalité de concentration qui stipule que si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes réelles indépendantes ayant toutes la même loi d'espérance μ et de variance σ^2 alors,

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\delta^2}.$$

On pose $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

1. Exprimer $E(M_n)$ et $V(M_n)$ en fonction de μ, n et σ^2.
2. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable M_n, puis conclure.