

Corrigés

Série d'exercices

Classe : 1^{re} Spé Maths

Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

D'après la propriété sur la somme des variables aléatoires indépendantes,

$$E(S_5) = \sum_{k=1}^5 E(X_k).$$

Or, pour tout entier k compris entre 1 et 5,

$$E(X_k) = 1000 \times 0,75 = 750.$$

Par conséquent, $E(S_5) = 5 \times 750 = 3750$.

Exercice n°2

1. Notons $x = P(X = 0)$. La loi de probabilité de X est :

$X = k$	0	2	5	7
$P(X = k)$	x	$\frac{3}{5}x$	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{5}x$

La somme des probabilités est égale à 1 donc :

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}x = 1 &\iff \frac{23}{10}x = 1 \\ &\iff x = \frac{10}{23}. \end{aligned}$$

D'où :

$X = k$	0	2	5	7
$P(X = k)$	$\frac{10}{23}$	$\frac{6}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{2}{23}$

2. $X = 2 \times \frac{6}{23} + 5 \times \frac{5}{23} + 7 \times \frac{2}{23} = \frac{51}{23}$.
3. Notons X_k la variable aléatoire représentant le nombre de minutes de retard du train d'Hubert le jour k , $1 \leq k \leq 20$.

Posons alors : $M_{20} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{20}}{20}$.

Alors,

$$\begin{aligned} E(M_{20}) &= \frac{E(X_1 + X_2 + \dots + X_{20})}{20} \\ &= \frac{E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{20})}{20} \\ &= \frac{20 \times \frac{51}{23}}{20} \\ &= \frac{51}{23} \\ &\approx 2,22. \end{aligned}$$

Ainsi, le retard moyen du train d'Hubert sur les 20 jours est d'environ 2 min 13 s.

Exercice n°3

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

1. *Faux.* Selon l'inégalité de Markov, $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$, ce qui donne dans notre cas :

$$P(X \geq 10) \leq \frac{9}{10}.$$

2. *Vrai.* En effet, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

ce qui donne dans notre cas :

$$P(|X - 7| \geq 18) \leq \frac{9}{18^2}$$

soit :

$$P(|X - 7| \geq 18) \leq \frac{1}{36} < 0,028.$$

3. *Faux.* Notons X_k le nombre de points lors du k -ième tirage. $X_k = 0$ ou $X_k = 1$. C'est une variable de Bernoulli. En répétant cette expérience (implicitement de manière indépendante), on constitue un schéma de Bernoulli dont la moyenne est :

$$\mu = np = 1000 \times \frac{4}{32} = 125$$

et de variance $\sigma^2 = np(1-p) = 109,375 = \frac{875}{8}$. D'après l'inégalité de concentration,

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\delta^2},$$

ce qui donne dans notre cas, en prenant $\delta = 5$:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - 125\right| \geq 5\right) \leq \frac{109,375}{1000 \times 5^2}$$

soit :

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - 125\right| \geq 5\right) \leq 0,004375.$$

On ne peut donc pas assurer que la probabilité pour que la différence entre la moyenne des gains et 125 soit supérieure ou égale à 5 est toujours inférieure à 0,001.

Exercice n°4

On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720 à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours de ces lancers. S suit une loi binomiale de paramètres 3600 et $\frac{1}{6}$. On sait donc que :

$$E(S) = 600 \quad \text{et} \quad V(S) = 500.$$

De plus,

$$480 < S < 720 \iff -120 < S-600 < 120 \iff |S-600| < 120.$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, on obtient :

$$P(|S - 600| \geq 120) \leq \frac{500}{120^2} \leq 0,035.$$

On en déduit que :

$$P(480 < S < 720) \geq 1 - 0,035$$

soit :

$$P(480 < S < 720) \geq 0,965.$$

En particulier, la probabilité que le numéro 1 apparaisse entre 480 et 720 fois au cours de ces 3600 lancers est supérieure à 0,96.

Exercice n°5

On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50.

1. Commençons par poser X la variable aléatoire représentant le nombre de pièces sortant de l'usine en l'espace d'une semaine.

D'après l'inégalité de Markov,

$$P(X > 75) \leq \frac{50}{75}$$

soit :

$$P(X > 75) \leq 0,67.$$

2. Commençons par écrire :

$$P(40 < X < 60) = P(-10 < X-50 < 10) = P(|X-50| < 10)$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{25}{10^2}$$

soit :

$$P(|X - 50| \geq 10) \leq 0,25.$$

On en déduit alors que :

$$1 - P(|X - 50| < 10) \leq 0,25$$

et donc :

$$P(|X - 50| < 10) \geq 0,75.$$

La probabilité pour que la production de la semaine suivante soit comprise entre 40 et 60 est donc au moins de 75%.

Exercice n°6

Le nombre de pièces sortant d'une usine en une journée est une variable aléatoire d'espérance 50. On veut estimer la probabilité que la production de demain dépasse 75 pièces.

1. Notons X la variable aléatoire représentant le nombre de pièces. En utilisant l'inégalité de Markov, on obtient :

$$P(X \geq 75) \leq \frac{E(X)}{75}$$

soit :

$$P(X \geq 75) \leq \frac{2}{3}.$$

2. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P(|X - 50| \geq 25) \leq \frac{V(X)}{25^2}$$

soit :

$$P(|X - 50| \geq 25) \leq \frac{5^2}{25^2}$$

et donc :

$$P(|X - 50| \geq 25) \leq 0,04.$$

Exercice n°7

On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - 10^2| \geq 10^3 - 10^2) \leq \frac{V(X)}{(10^3 - 10^2)^2}$$

pour trouver finalement :

$$P(|X - 10^2| \geq 10^3 - 10^2) \leq 0,000\,123\,456\,790\,123.$$

Ainsi, $P(X \geq 10^3) \leq 0,000\,124$.

Exercice n°8

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p . On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur un échantillon très grand et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que $\frac{X_n}{n}$ approche p .

1. X_n est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p . Ainsi, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. On en déduit alors que :

$$E(X_n) = np \quad \text{et} \quad V(X_n) = np(1-p).$$

2. D'après l'inégalité de concentration,

$$\forall \delta > 0, \quad P(|X_n - np| \geq \delta) \leq \frac{np(1-p)}{\delta^2}.$$

Or,

$$|X_n - np| \geq \delta \iff \left| \frac{X_n}{n} - p \right| \geq \frac{\delta}{n}$$

En posant $\varepsilon = \frac{\delta}{n}$, on obtient alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left| \frac{X_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2}$$

que l'on peut aussi écrire, en simplifiant par n le dernier membre, sous la forme :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left| \frac{X_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}p(1-p).$$

De plus, la fonction $p \mapsto p(1-p)$ définie sur $[0; 1]$ est une fonction de degré 2 admettant un maximum pour $p = \frac{1}{2}$ qui vaut $\frac{1}{4}$, donc :

$$p(1-p) \leq \frac{1}{4}.$$

L'inégalité devient alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

3. On cherche ici un entier n tel que :

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < 10^{-2}\right) \geq 0,95$$

que l'on peut aussi écrire, en considérant l'événement contraire :

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq 10^{-2}\right) \leq 0,05.$$

D'après l'inégalité obtenue à la question précédente, il suffit donc de trouver un entier n tel que :

$$\frac{1}{4n(10^{-2})^2} \leq 0,05.$$

On trouve alors $n \geq 50\,000$.

Exercice n°9

On lance de manière indépendante n fois un dé équilibré à six faces.

Commençons par poser X la variable aléatoire représentant le nombre de « 1 » obtenus.

X suit alors la loi $\mathcal{B}(n; \frac{1}{6})$ et a donc une espérance égale à $\frac{n}{6}$ et une variance égale à $np(1-p) = \frac{5n}{36}$.

On nous demande ici de trouver un entier n tel que :

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{n}{3}\right) \geq 0,99.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que :

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0, \quad P\left(\left|X - \frac{n}{6}\right| \geq \delta\right) &\leq \frac{5n}{36\delta^2} \\ \iff P\left[\left(X - \frac{n}{6} \leq -\delta\right) \cup \left(X - \frac{n}{6} \geq \delta\right)\right] &\leq \frac{5n}{36\delta^2} \\ \iff 1 - P\left(-\delta \leq X - \frac{n}{6} \leq \delta\right) &\leq \frac{5n}{36\delta^2} \end{aligned}$$

$$\forall \delta > 0, \quad \iff P\left(-\delta \leq X - \frac{n}{6} \leq \delta\right) \geq 1 - \frac{5n}{36\delta^2}.$$

On aimerait arriver à une inégalité avec $P\left(0 \leq X \leq \frac{n}{3}\right)$; cela nous pousse à prendre $\delta = \frac{n}{6}$ pour obtenir :

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{n}{3}\right) \geq 1 - \frac{5}{n}.$$

Ainsi, il suffit de choisir un n tel que :

$$1 - \frac{5}{n} \geq 0,99 \iff n \geq 500.$$

Nous sommes donc assurés que pour $n \geq 500$, notre probabilité est supérieure à 0,99.

Exercice n°10

On souhaite démontrer l'inégalité de Markov stipulant que pour une variable aléatoire discrète d'espérance finie X à n valeurs positives,

$$\forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

On note :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k).$$

1. On peut « couper » la somme désignant l'espérance de X en deux sommes : la première comportant toutes les valeurs de X inférieures strictement à a et la seconde comportant les valeurs de X supérieures ou égales à a , ce qui donne :

$$E(X) = \sum_{x_k \geq a} x_k P(X = x_k) + \sum_{x_k < a} x_k P(X = x_k).$$

2. On sait que $X \geq 0$ donc, pour tout entier k compris entre 1 et n , $x_k \geq 0$. De plus, une probabilité est toujours supérieure ou égale à 0.

Ainsi, pour tout entier $k \in [1; n]$, $x_k P(X = x_k) \geq 0$, ce qui implique que :

$$\sum_{x_k < a} x_k P(X = x_k) \geq 0.$$

3. De la question précédente, on déduit que :

$$E(X) \geq \sum_{x_k \geq a} x_k P(X = x_k).$$

Or, dans cette somme, $x_k \geq a$, ce qui implique :

$$E(X) \geq \sum_{x_k \geq a} a P(X = x_k)$$

soit :

$$E(X) \geq a \sum_{x_k \geq a} P(X = x_k).$$

De plus, par définition :

$$\sum_{x_k \geq a} P(X = x_k) = P(X \geq a)$$

ce qui implique alors :

$$E(X) \geq a P(X \geq a).$$

On en déduit alors, en divisant par $a \neq 0$:

$$\frac{E(X)}{a} \geq P(X \geq a).$$

Exercice n°11

On se propose dans cet exercice de démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, stipulant que si X est une variable aléatoire discrète d'espérance μ et de variance $V(X)$ alors, quel que soit le réel $\delta > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Pour cela, on considère la variable $Y = [X - E(X)]^2$.

Par définition, Y est une variable aléatoire à valeurs positives et :

$$E(Y) = E[(X - E(X))^2] = V(X).$$

L'inégalité de Markov appliquée à Y donne alors :

$$\begin{aligned} \forall a > 0, \quad P(Y \geq a) &\leq \frac{E(Y)}{a} \\ \iff \forall a > 0, \quad P((X - E(X))^2 \geq a) &\leq \frac{V(X)}{a}. \end{aligned}$$

Posons alors $a = \delta^2$ avec $\delta > 0$. On obtient alors :

$$\forall \delta > 0, \quad P((X - E(X))^2 \geq \delta^2) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Or,

$$(X - E(X))^2 \geq \delta^2 \iff |X - E(X)| \geq \delta$$

car $\delta > 0$. Cela donne alors :

$$\forall \delta > 0, \quad P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Exercice n°12

Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que X admet une espérance $E(X) = \mu$ et une variance $V(X) = \sigma^2$. Soit $a > 0$.

1. On a :

$$X - \mu \geq a \iff X - \mu + \lambda \geq a + \lambda$$

donc la probabilité des deux événements $(X - \mu \geq a)$ et $(X - \mu + \lambda \geq a + \lambda)$ sont égales.

2. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E((X - \mu + \lambda)^2) &= E((X - \mu)^2 + 2(X - \mu)\lambda + \lambda^2) \\ &= \underbrace{E((X - \mu)^2)}_{=V(X)} + 2\lambda \underbrace{E(X - \mu)}_{=0} + \lambda^2 \\ &= \sigma^2 + \lambda^2. \end{aligned}$$

3. Dans un premier temps, on a :

$$P(X - \mu \geq a) = P(X - \mu + \lambda \geq a + \lambda).$$

Or,

$$P(X - \mu + \lambda \geq a + \lambda) \leq P((X - \mu + \lambda)^2 \geq (a + \lambda)^2).$$

Ainsi,

$$P(X - \mu \geq a) \leq P((X - \mu + \lambda)^2 \geq (a + \lambda)^2).$$

En appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X - \mu + \lambda)^2$, on obtient :

$$P((X - \mu + \lambda)^2 \geq (a + \lambda)^2) \leq \frac{E[(X - \mu + \lambda)^2]}{(a + \lambda)^2}.$$

Ainsi,

$$P(X - \mu \geq a) \leq \frac{E[(X - \mu + \lambda)^2]}{(a + \lambda)^2}$$

d'où :

$$P(X - \mu \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(a + \lambda)^2}.$$

4. Posons $f(\lambda) = \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(a + \lambda)^2}$, avec $\lambda \geq 0$.

Sa dérivée vaut :

$$f'(\lambda) = 2 \frac{a\lambda - \sigma^2}{(a + \lambda)^3}.$$

On en déduit que $f'(\lambda) > 0 \iff \lambda > \frac{\sigma^2}{a}$.

Notamment, f admet un minimum en $\lambda = \frac{\sigma^2}{a}$, et ce minimum vaut $\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.

Ainsi,

$$P(X - \mu \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(a + \lambda)^2} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

On peut écrire :

$$(|X - \mu| \geq a) = (X - \mu \geq a) \cup (\mu - X \geq a).$$

Les deux événements $(X - \mu \geq a)$ et $(\mu - X \geq a)$ étant disjoints,

$$P(|X - \mu| \geq a) = P(X - \mu \geq a) + P(\mu - X \geq a).$$

À l'aide de la question précédente, appliquée à $X - \mu$ et à $\mu - X$, on obtient :

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} + \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

soit :

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

5. Cette dernière inégalité est meilleure que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev si :

$$\begin{aligned} \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} < \frac{\sigma^2}{a^2} &\iff \frac{2}{\sigma^2 + a^2} < \frac{1}{a^2} \\ &\iff \frac{\sigma^2 + a^2}{2} > a^2 \\ &\iff \frac{\sigma^2 + a^2}{2} > \frac{2a^2}{2} \\ &\iff \sigma^2 > a^2 \\ &\iff a < \sigma \text{ car } a \text{ et } \sigma \text{ sont positifs.} \end{aligned}$$

Exercice n°13

On dispose d'une urne dans laquelle sont mises 7 boules rouges et 3 noires. On tire au hasard une boule de cette urne et on la remet dans l'urne; si la boule choisie est noire, on gagne 1 point. Sinon, on ne gagne pas de point.

On note M_n le gain moyen de points après n répétitions indépendantes de cette expérience.

On cherche un entier n tel que :

$$P(|M_n - 0,3| \geq 0,1) \leq 0,5.$$

Notons X_k le nombre de points gagnés au k -ième tirage, $1 \leq k \leq n$.

X_k suit la loi de Bernoulli de probabilité $p = \frac{3}{10} = 0,3$ et de variance $\sigma^2 = 0,3 \times (1 - 0,3) = 0,21$.

De plus, par définition, les X_k sont indépendantes donc on peut utiliser l'inégalité de concentration :

$$P(|M_n - 0,3| \geq 0,1) \leq \frac{0,21}{0,1^2 n}.$$

On souhaite que $P(|M_n - 0,3| \geq 0,1) \leq 0,5$ donc il suffit de choisir n tel que :

$$\begin{aligned} \frac{0,21}{0,1^2 n} \leq 0,5 &\iff \frac{0,1^2 n}{0,21} \geq \frac{1}{0,5} \\ &\iff 0,1^2 n \geq \frac{1}{0,5} \times 0,21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{0,21}{0,1^2 n} \leq 0,5 &\iff n \geq \frac{1}{0,5} \times \frac{0,21}{0,1^2} \\ &\iff n \geq 42. \end{aligned}$$

Exercice n°14

On lance n fois un dé à 6 faces et on regarde la fréquence d'obtention de la face « 6 ».

D'après le théorème de Khintchine (loi faible des grands nombres), si on note pour $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{cases} X_k = 1 & \text{si on obtient un « 6 »} \\ X_k = 0 & \text{Si on n'obtient pas un « 6 »} \end{cases}$$

où les X_k sont indépendantes et suivent la même loi de Bernoulli de probabilité $\frac{1}{6}$ et donc d'espérance $\mu = \frac{1}{6}$, on peut écrire pour tout $\delta > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) = 0$$

ce qui signifie que la fréquence $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ se rapprochera de $\mu = \frac{1}{6}$ quand n deviendra de plus en plus grand.

Exercice n°15

On considère une marche aléatoire sur \mathbb{Z} définie de la façon suivante : on part de 0 et, à chaque étape,

- on a une probabilité p de faire un pas vers la droite;
- on a une probabilité $1 - p$ de faire un pas vers la gauche.

Autrement dit, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_n = -1) = 1 - p.$$

On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

— $S_3 \in \{-3; -1; 1; 3\}$.

On s'aperçoit que S_n est la position à laquelle nous nous trouvons à la fin de l'étape n .

2. $\mu = E(X_k) = 1 \times P(X_k = 1) + (-1) \times P(X_k = -1) = 1 \times p + (-1) \times (1 - p) = 2p - 1$
3. $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ et d'après le théorème de Khintchine (loi faible des grands nombres),

$$\forall \delta > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) = 0.$$

Cela signifie donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 2p - 1$.

Exercice n°16

On se propose dans cet exercice de démontrer l'inégalité de concentration qui stipule que si X_1, X_2, \dots, X_n sont n variables aléatoires discrètes réelles indépendantes ayant toutes la même loi d'espérance μ et de variance σ^2 alors,

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\delta^2}.$$

On pose $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

1. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E(M_n) &= E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X_1 + \dots + X_n) \\ &= \frac{1}{n} [E(X_1) + \dots + E(X_n)] = \frac{1}{n} (\mu + \dots + \mu) = \frac{1}{n} \times n\mu \\ &= \mu. \end{aligned}$$

De plus, comme les X_k sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} V(M_n) &= V\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(X_1 + \dots + X_n) \\ &= \frac{1}{n^2} [V(X_1) + \dots + V(X_n)] = \frac{1}{n^2} (\sigma^2 + \dots + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

2. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à M_n , pour tout $\delta > 0$, on a :

$$P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{n\delta^2}.$$

1. Regardons les premières valeurs de S_n :

- $S_1 \in \{-1; 1\}$ car X_1 ne peut prendre pour valeurs que -1 ou 1 ;
- $S_2 \in \{-1-1; -1+1; 1-1; 1+1\}$ soit $S_2 \in \{-2; 0; 2\}$;