Série d'exercices

Série d'exercices | Classe : Tle Spé Maths | Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

1. Réponse (c). D'après le cours, si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$ alors $E(X) = np$.
   Donc ici, $E(X) = 10 \times 0{,}2 = 2$.
2. Réponse (b). D'après le cours, si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$ alors $V(X) = np(1-p)$.
   Donc ici, $V(X) = 20 \times 0{,}15 \times (1 - 0{,}15) = 2{,}55$.
3. Réponse (a). En effet, $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ par linéarité de l'espérance.
   Or, $E(X) = 15 \times 0{,}1 = 1{,}5$ et $E(Y) = 20 \times 0{,}3 = 6$. Donc $E(X+Y) = 1{,}5 + 6 = 7{,}5$.
4. Réponse (c). En effet, d'après le cours, $V(aX) = a^2V(X)$ donc $V(2X) = 2^2V(X) = 4 \times 5 = 20$.

Exercice n°2

1. L'expérience consistant à choisir au hasard un composant électronique est une épreuve de Bernoulli dont le succès est : « le composant est défectueux » et donc la probabilité est $p = 0{,}000\,7$.
   Ainsi, répéter 20 fois de façon indépendante cette expérience constitue un schéma de Bernoulli et le nombre de succès obtenus est représenté par une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0{,}000\,7)$.
2. $$\begin{aligned} P(X \geqslant 2) &= 1 - P(X \leqslant 1) \\ &= 1 - \big(P(X=0) + P(X=1)\big) \\ &= 1 - \left[\binom{20}{0} \times 0{,}000\,7^0 \times (1 - 0{,}000\,7)^{20} \right.\\ &\left.+ \binom{20}{1} \times 0{,}000\,7^1 \times (1 - 0{,}000\,7)^{19}\right] \\ &\approx 0{,}000\,09. \end{aligned}$$

Exercice n°3

1. $X = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$.
2. L'expérience consistant à choisir au hasard une boule de l'urne est une épreuve de Bernoulli dont le succès est S : « avoir une boule bleue », dont la probabilité est $p = \frac{3}{10} = 0{,}3$. Ainsi, si l'on répète de façon indépendante 5 fois cette expérience, cela constitue un schéma de Bernoulli. Autrement dit,
   $X \hookrightarrow \mathcal{B}(5; 0{,}3)$.
3. $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, avec $p = 0{,}3$.
   (a) $P(X = 0) = \binom{5}{0} \times 0{,}3^0 \times (1 - 0{,}3)^{5-0} = 1 \times 1 \times 0{,}7^5 = 0{,}168\,07$.
   (b) $P(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0{,}3^3 \times 0{,}7^2 = 0{,}132\,3$.
   (c) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 0{,}831\,93$.

Exercice n°4

.

1. $X = \{0\,;1\,;2\,;3\}$.
   $D = 20(3 - X)$ donc $D = \{0\,;20\,;40\,;60\}$.
2. $$\begin{aligned} P(D = 40) &= P(60 - 20X = 40) \\ &= P(-20X = -20) \\ &= P(X = 1) \\ &= \binom{3}{1} \times 0{,}4^1 \times 0{,}6^2 \\ &= 0{,}432. \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} E(D) &= E(60 - 20X) \\ &= 60 - 20E(X) \\ &= 60 - 20 \times (3 \times 0{,}4) \\ &= 36. \end{aligned}$$
   Benjamin peut donc s'attendre à dépenser en moyenne 36 € par an.

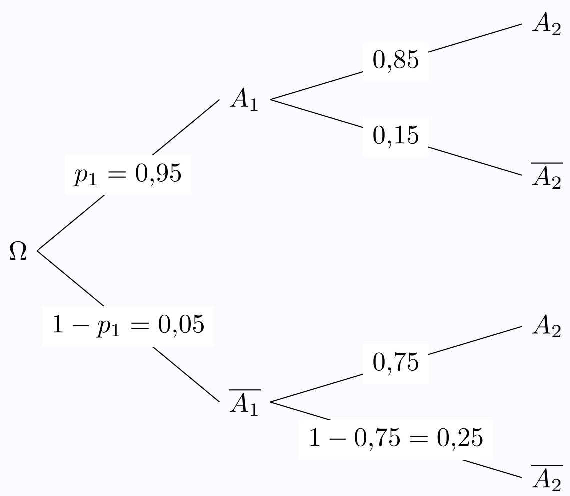
Exercice n°5

1. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(6; \frac{2}{3})$. En effet, l'expérience consistant à arriver à un feu tricolore et à regarder sa couleur est une épreuve de Bernoulli dont le succès est ici S : « le feu est vert » et dont la probabilité est égale à $\frac{2}{3}$ d'après l'énoncé.
2. Sans feu tricolore, le temps nécessaire pour parcourir 3 km avec une vitesse de 15 km/h est $60 \div 5 = 12$ minutes (en effet, si on fait 15 km en 60 minutes, 3 km seront faits en $\frac{1}{5}$ de 60 minutes).
   À ces 12 minutes, il faut ajouter 1,5 minute par feu rouge ou orange. La variable aléatoire représentant le nombre de feux rouges ou oranges est $(6 - X)$ donc :
   $$T = 12 + 1{,}5(6 - X). \qquad \text{Soit,} \qquad T = 21 - 1{,}5X.$$
3. D'après une propriété du cours, $E(T) = E(21 - 1{,}5X) = 21 - 1{,}5E(X)$.
   Or, $E(X) = 6 \times \frac{2}{3} = 4$. Ainsi, $E(T) = 21 - 1{,}5 \times 4$, soit $E(T) = 15$.
   L'élève peut donc s'attendre arriver au lycée 15 minutes en moyenne après son départ.
4. On cherche $P(T > 17)$.
   $$\begin{aligned} P(T > 17) &= P(21 - 1{,}5X > 17) \\ &= P(-1{,}5X > -4) \\ &= P(X < \frac{4}{1{,}5}) \\ &= P(X \leqslant 2) \quad \text{car X est un nombre entier} \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 3) \\ &= \frac{73}{729} \approx 0{,}1. \end{aligned}$$

Exercice n°6

Un joueur de basket-ball effectue une succession de n tirs en direction du panier. Les statistiques de ce joueur nous informent que :

1. On peut représenter la situation pour $n = 2$ avec l'arbre suivant :



   Ainsi, $p_2 = 0{,}95 \times 0{,}85 + 0{,}05 \times 0{,}75 = 0{,}845$.

2. Sur le même modèle, quel que soit l'entier naturel n non nul,

$$p_{n+1} = 0{,}85 p_n + 0{,}75(1 - p_n)$$
$$p_{n+1} = 0{,}1 p_n + 0{,}75.$$

3. $$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{5}{6} = \frac{1}{10}p_n + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$$
$$= \frac{1}{10}p_n - \frac{1}{12} = \frac{1}{10}\left(p_n - \frac{1}{12} \times \frac{10}{1}\right)$$
$$= \frac{1}{10}\underbrace{\left(p_n - \frac{5}{6}\right)}_{=u_n} = 0{,}1u_n.$$

   Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}1$ et de premier terme :

$$u_1 = p_1 - \frac{5}{6} = \frac{95}{100} - \frac{5}{6} = \frac{7}{60}.$$

   On en déduit alors que $u_n = u_1 \times q^{n-1} = \frac{7}{60} \times 0{,}1^{n-1}$ et donc :

$$u_n = p_n - \frac{5}{6} \iff p_n = u_n + \frac{5}{6}$$
$$\iff \boxed{p_n = \frac{7}{60} \times 0{,}1^{n-1} + \frac{5}{6}}$$

4. On déduit que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} p_n = \frac{5}{6}$. Ainsi, à longs termes, le joueur réussira 5 tirs sur 6.

Exercice n°7

Chaque année, l'association des gens polis de Paris organise un congrès, tous les participants doivent se serrer la main. Cette année, il y a 50 participants.

Il y a deux façons de raisonner pour cet exercice.

— *Raisonnement combinatoire.*
Le nombre de poignées de mains est égal au nombre de sous-ensembles à deux éléments que l'on peut former dans un ensemble à 50 d'éléments, à savoir $\binom{50}{2} = 1\,225$.
Il y a donc 1 225 poignées de mains.

— *Analyse numérique.*
Le premier participant peut serrer la main à 49 personnes. Ensuite, le deuxième peut serrer la main aux 48 personnes restantes. Le troisième peut serrer la main aux 47 autres, etc. jusqu'aux deux dernières personnes qui ne peuvent donner qu'une poignée de mains.
Il y a donc $49 + 48 + 47 + \cdots + 2 + 1$ poignées de mains possibles. Or,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Il y a donc $\frac{49 \times 50}{2} = 1\,225$ poignées de mains.

Exercice n°8

Lors d'un jeu radiodiffusé, on estime que le candidat, quelle que soit la question posée, a deux chances sur trois de donner la bonne réponse. Il gagne 50 euros par réponse exacte.

1. Le jeu est une succession de 5 expériences identiques et indépendantes.
   « Donner cinq bonnes réponses » correspond à la liste de cinq résultats « Donner la bonne réponse », et a donc pour probabilité $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$.
2. Le candidat gagne 250 euros lorsqu'il a cinq bonnes réponses, donc la probabilité qu'il gagne 250 euros est $\frac{32}{243}$.
3. Chaque question correspond à une épreuve de Bernoulli dont le succès est « Donner la bonne réponse », et a pour probabilité $\frac{2}{3}$. Comme il y a 5 répétitions indépendantes, la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(5\ ;\frac{2}{3}\right)$.
4. Comme chaque réponse exacte fait gagner 50 euros, si on note y_i les valeurs prises par Y, on a $y_i = 50x_i$. Connaissant la loi de X, on en déduit la loi de Y dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
y_i	0	50	100	150
$P(X = x_i)$ $P(Y = y_i)$	$\binom{5}{0}\frac{1}{3^5}$	$\binom{5}{1}\frac{2}{3^5}$	$\binom{5}{2}\frac{2^2}{3^5}$	$\binom{5}{3}$ [illegible]
Valeurs approchées	0,004	0,041	0,165	0,32[illegible]

5. Pour calculer l'espérance de Y, on peut prendre les valeurs numériques du tableau et appliquer la formule, mais il est plus rapide de constater que comme $y_i = 50x_i$, alors :

$$p_1y_1 + \cdots + p_5y_5 = 50(p_1x_1 + \cdots + p_5x_5) = 50E(X).$$

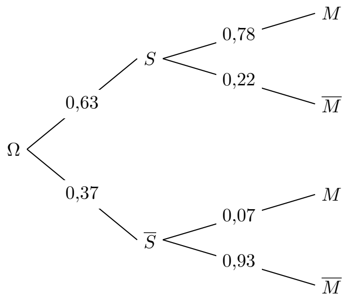
   Or, on sait que si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, son espérance vaut np. Par conséquent $E(Y) = 50 \times 5 \times \frac{2}{3} = \frac{500}{3}$.

Exercice n°9

On note :

- S l'événement : « la personne choisie présente des symptômes de la STAS-3 »,
- M l'événement : « la personne est réellement atteinte de la STAS-3 ».

1. L'arbre représentant la situation est le suivant :



2. On nous demande ici de calculer $P(S \cap M)$:

$$\begin{aligned} P(S \cap M) &= P(S) \times P_S(M) \\ &= 0{,}63 \times 0{,}78 \\ P(S \cap M) &= 0{,}4914. \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} P(M) &= P(S \cap M) + P(\overline{S} \cap M) \\ &= 0{,}4914 + 0{,}37 \times 0{,}07 \\ P(M) &= 0{,}5173. \end{aligned}$$

La probabilité pour que la personne choisie au hasard soit réellement atteinte de la STAS-3 est donc de 0,5173.

4. $$\begin{aligned} P_{\overline{M}}(S) &= \frac{P(S \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} \\ &= \frac{0{,}63 \times 0{,}22}{1 - 0{,}5173} \\ P_{\overline{M}}(S) &\approx 0{,}2871. \end{aligned}$$

5. L'épreuve consistant à regarder si une personne est réellement atteinte de la STAS-3 est une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est 0,5173 (calculée à la question précédente).
On répète ici de manière indépendant 20 fois cette épreuve donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}5173$.

6. D'après l'énoncé, $G = 100\,000 + 100X$. En effet, l'hôpital reçoit 100 000 € quel que soit le nombre de personnes atteintes de la STAS-3, auxquels s'ajoutent 100 € par personnes atteintes, soit $100X$ €.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} E(G) &= E(100\,000 + 100X) \\ &= 100\,000 + 100E(X) \text{ (par liéarité de E))} \\ &= 100\,000 + 100 \times (20 \times 0{,}5173) \\ &= 101\,034{,}6 \end{aligned}$$

L'hôpital peut alors espérer recevoir 101 034,60 € sur ces 20 personnes.

7. À la calculatrice, on a :
   - $P(X = 5) \approx 0{,}0103$.
   - $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}0141$.
   - $P(X \geqslant 10) \approx 0{,}6478$.

8. Pour déterminer le premier entier k pour lequel $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}95$, on peut calculer pour commencer :

$$P(X \leqslant 10) \approx 0{,}5263.$$

On prend $k = 10$ car il y a en tout 20 patients. On voit que la probabilité n'est pas supérieure à 0,95 ; on peut alors prendre $k = 15$ (à mi-chemin entre 10 et 20) :

$$P(X \leqslant 15) \approx 0{,}9970 \geqslant 0{,}95.$$

On prend alors $k = 14$:

$$P(X \leqslant 14) \approx 0{,}9703 \geqslant 0{,}95.$$

On prend alors $k = 13$:

$$P(X \leqslant 13) \approx 0{,}9222 < 0{,}95.$$

Le premier entier k pour lequel $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}95$ est donc $k = 14$.

Exercice n°10

Le lancer d'une pièce équilibrée est une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,5 dont le succès est « Obtenir Face ». Si on répète le lancer trois fois, de façons indépendantes, la variable Y qui donne le nombre de fois y_i où Face est obtenu suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3\,; 0{,}5)$.
En notant x_i les valeurs de la variable aléatoire X, on peut dresser le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3
$P(Y = y_i)$	$\binom{3}{0} 0{,}5^3$	$\binom{3}{1} 0{,}5^3$	$\binom{3}{2} 0{,}5^3$	$\binom{3}{3} 0{,}5^3$
x_i	-3	0	3	6
$P(X = x_i)$	0,125	0,375	0,375	0,125

L'espérance de X est donc :

$$E(X) = -3 \times 0{,}125 + 3 \times 0{,}375 + 6 \times 0{,}125 = 1{,}5.$$

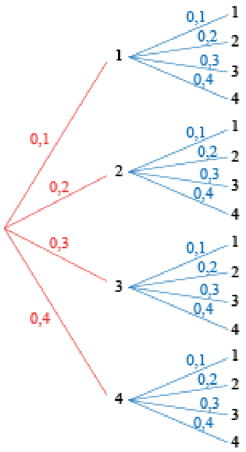
Exercice n°11

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les chiffres 1, 2, 3 et 4. On lit le résultat d'un lancer sur la face cachée du dé.
On note p_i la probabilité d'obtenir le chiffre i suite à un lancer de ce dé.
Le dé est déséquilibré de telle sorte que ces probabilités sont :

$$p_1 = 0{,}1\,; p_2 = 0{,}2\,; p_3 = 0{,}3\,; p_4 = 0{,}4\,.$$

On lance deux fois successivement ce dé. On suppose que les lancers sont indépendants entre eux.

1. On est en présence de la répétition de deux expériences identiques et indépendantes. On peut construire l'arbre pondéré suivant, en indiquant les probabilités d'obtention de chaque chiffre pour le premier et le deuxième lancer.



2. Il n'y a qu'une seule façon d'obtenir les chiffres 1 et 3 dans cet ordre. La probabilité de cet événement est :

$$p = 0{,}1 \times 0{,}3 = 0{,}03.$$

3. Les différentes façons d'obtenir deux chiffres distincts rangés par ordre croissant sont les suivantes :

$$(1;2)\,;(1;3)\,;(1;4)\,;(2;3)\,;(2;4)\,;(3;4)$$

La probabilité de l'événement correspondant est donc :

$$\begin{aligned} p &= 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}1 \times 0{,}4 \\ &\quad + 0{,}2 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}4 \\ &= 0{,}35. \end{aligned}$$

4. (a) Avec cette règle, le gain algébrique à ce jeu peut-être de -3 euros, 2 € ou 5 €.
Déterminer la loi de probabilité de X, c'est donner les probabilités de chacun des événements :

$$P(X=-3)\,,P(X=2) \text{ et } P(X=5).$$

D'après la question précédente, on a déjà calculé $P(X=2) = 0{,}35$.
On gagne de plus 5 euros uniquement lorsqu'on obtient deux fois le chiffre 1. Cet événement se produit avec une probabilité de :

$$P(X=5) = 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01\,.$$

Dans tous les autres cas, on perd 3 euros, et ainsi :

$$\begin{aligned} P(X=-3) &= 1 - \Big(P(X=2) + P(X=5)\Big) \\ &= 1 - 0{,}35 - 0{,}01 = 0{,}64. \end{aligned}$$

On peut résumer ces résultats par le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X :

Gain x_i	-3	2	5
$P(X=x_i)$	0,64	0,35	0,01

(b) L'espérance de X est :

$$E(X) = -3 \times 0{,}64 + 2 \times 0{,}35 + 5 \times 0{,}01 = -1{,}17.$$

On en déduit que ce jeu n'est pas équitable : en moyenne, le joueur peut s'attendre à perdre 1,17 euros par partie.

La variance de X est :

$$\begin{aligned} V(X) &= (-3+1{,}17)^2 \times 0{,}64 + (2+1{,}17)^2 \times 0{,}35 \\ &\quad + (5+1{,}17)^2 \times 0{,}01 \\ &\approx 6{,}04. \end{aligned}$$

D'où son écart type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 2{,}46.$$

(c) On remarque que l'on passe de la variable aléatoire X à la variable aléatoire Y par la relation affine :

$$Y = 2X + 1.$$

La loi de probabilité de Y est alors :

Gain y_i	-5	5	11
$P(X=y_i)$	0,64	0,35	0,01

La formule du cours sur l'espérance donne :

$$E(Y) = E(2X+1) = 2E(X) + 1 = -1{,}34.$$

Pour la variance et l'écart-type, on fait le calcul suivant :

$$\begin{aligned} V(Y) &= 0{,}64(-5+1{,}34)^2 + 0{,}35(5+1{,}34)^2 + 0{,}01(11+1{,} \\ &= 24{,}1644. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} \approx 4{,}92$.

Exercice n°12

Une urne contient 3 boules bleues et 7 boules vertes.
On tire successivement au hasard et de façon indépendante 5 boules de cette urne en les remettant dans l'urne après avoir regardé leur couleur.
On note X le variable aléatoire représentant le nombre de boules bleues tirées à la fin de cette expérience.

1. X $= \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$. En effet, sur 5 tirages successifs avec remise de la boule tirée, on peut n'avoir aucune boule bleue comme en avoir 1, 2, 3, 4 ou 5.
2. L'expérience consistant à choisir au hasard une boule de l'urne est une épreuve de Bernoulli dont le succès est S : « avoir une boule bleue », dont la probabilité est $p = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$. Ainsi, si l'on répète de façon indépendante 5 fois cette expérience, cela constitue un schéma de Bernoulli ; ainsi, la variable aléatoire représentant le nombre de succès obtenus à l'issue de ce schéma suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5;0{,}3)$.
3. X $\hookrightarrow \mathcal{B}(5;0{,}3)$ donc $P(X=k) = \dbinom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$, avec $p = 0{,}3$. Ainsi :
   (a) $P(X=0) = \dbinom{5}{0} \times 0{,}3^0 \times (1-0{,}3)^{5-0} = 1 \times 1 \times 0{,}7^5 = 0{,}168\,07$.
   (b) $P(X=3) = \dbinom{5}{3} \times 0{,}3^3 \times 0{,}7^2 = 0{,}132\,3$.
   (c) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}168\,07 = 0{,}831\,93$.

Exercice n°13

Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de 15 km/h.
Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est $\frac{2}{3}$.
Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire égale au temps (en minute) mis par l'élève pour aller au lycée.

1. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(6; \frac{2}{3}\right)$. En effet, l'expérience consistant à arriver à un feu tricolore et à regarder sa couleur est une épreuve de Bernoulli dont le succès est ici S : « le feu est vert » et dont la probabilité est égale à $\frac{2}{3}$ d'après l'énoncé.
2. Sans feu tricolore, le temps nécessaire pour parcourir 3 km avec une vitesse de 15 km/h est $60 \div 5 = 12$ minutes (en effet, si on fait 15 km en 60 minutes, 3 km seront faits en $\frac{1}{5}$ de 60 minutes).

   À ces 12 minutes, il faut ajouter 1,5 minute par feu rouge ou orange. La variable aléatoire représentant le nombre de feux rouges ou oranges est $(6 - \mathrm{X})$ donc :
   $$\mathrm{T} = 12 + 1{,}5(6 - \mathrm{X}) \qquad \text{soit :} \qquad \mathrm{T} = 21 - 1{,}5\mathrm{X}.$$
3. D'après une propriété du cours, $E(T) = E(21\text{-}1{,}5X) = 21 - 1{,}5E(X)$.

   Or, $E(X) = 6 \times \frac{2}{3} = 4$. Ainsi, $E(T) = 21 - 1{,}5 \times 4$, soit $E(T) = 15$.

   L'élève peut donc s'attendre arriver au lycée 15 minutes en moyenne après son départ.
4. On cherche $P(T > 17)$.
   $$\begin{aligned} P(T > 17) &= P(21 - 1{,}5X > 17) \\ &= P(-1{,}5X > 17 - 21) \\ &= P(-1{,}5X > -4) \\ &= P\left(X < \frac{4}{1{,}5}\right) \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 3) \\ &= \frac{73}{729} \approx 0{,}1. \end{aligned}$$

Exercice n°14

Alain et Benjamin pratiquent assidûment le tennis. On estime que la probabilité qu'Alain gagne une rencontre est 0,6. Ils décident de jouer trois matches dans l'année (les résultats des matches sont indépendants les uns des autres) et de faire une cagnotte pour s'offrir un repas en fin d'année. À la fin de chaque match, le perdant versera 20 €.

1. $\mathrm{X} = \{0\,;1\,;2\,;3\}$.

   $\mathrm{D} = 20(3 - \mathrm{X})$ donc $\mathrm{D} = \{0\,;20\,;40\,;60\}$.
2. $$\begin{aligned} P(D = 40) &= P(60 - 20X = 40) \\ &= P(-20X = -20) \\ &= P(X = 1) \\ &= \binom{3}{1} \times 0{,}4^1 \times 0{,}6^2 \\ &= 0{,}432. \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} E(D) &= E(60 - 20X) \\ &= 60 - 20E(X) \\ &= 60 - 20 \times (3 \times 0{,}4) \\ &= 36. \end{aligned}$$

   Benjamin peut donc s'attendre à dépenser en moyenne 36 € par an.

Exercice n°15

Un jeu télévisé se déroule en deux manches :

— *Première manche.*
Une personne tire au hasard et simultanément deux boules d'une urne contenant 20 boules numérotées de 1 à 20. Si une boule portant un numéro multiple de 5 est choisie, 20 points sont gagnés ; dans le cas contraire, aucun point n'est gagné.

— *Seconde manche.*
La personne doit ouvrir une porte parmi trois portes fermées. Seule l'une d'elles peut multiplier par 2 les gains gagnés lors de la première manche. L'une des deux autres permet d'ajouter 5 points ; quant à l'autre, elle retire 5 points si les gains de la première manche sont supérieurs ou égaux à 5. Sinon, rien n'est retiré.

À l'issue de ces deux manches, chaque point vaut 100 €.

On appelle G le gain de la personne participant au jeu.

1. On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de points à l'issue de la première manche.

   Déterminer la loi de probabilité de X, puis calculer $E(X)$.
2. On note Y la variable aléatoire représentant le gain algébrique des points à l'issue de la seconde manche.

   Déterminer la loi de probabilité de Y ainsi que $E(Y)$.
3. Calculer $E(G)$.
4. À l'issue de ces deux manches, la personne doit participer à la manche finale qui consiste à répondre à cinq questions de culture générale. À chaque mauvaise réponse, il ou elle perd 200 €sur les gains obtenus précédemment.

   On note Z la variable aléatoire représentant le nombre de bonnes réponses d'une personne lors de cette manche finale.

   La société productrice du jeu estime que Z suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}2$.

   Déterminer le gain que peut espérer avoir la personne à l'issue de cette finale.