Exercice n°1

1. $\ln 8 - \ln 2 = \ln\left(\dfrac{8}{2}\right) = \ln 4$ (que l'on peut aussi mettre sous la forme $2\ln 2$).
2. $\ln 6 + \ln 3 = \ln(6\times 3) = \ln 18$.
3. $\ln 25 - \ln 30 + \ln 10 = \ln\left(\dfrac{25}{30}\times 10\right) = \ln\dfrac{25}{3}$.
4. $\ln 50 + \ln 2 - \ln 10 = \ln\left(\dfrac{50\times 2}{10}\right) = \ln 10$.
5. $3\ln 4 - \ln 256 = 3\ln\left(2^2\right) - \ln\left(2^8\right) = 6\ln 2 - 8\ln 2 = -2\ln 2$.
6. $2\ln 2 - \ln 16 + \ln 128 = 2\ln 2 - \ln 2^4 + \ln 2^7 = 2\ln 2 - 4\ln 2 + 7\ln 2 = 5\ln 2$.
7. $\ln e^{2x} = 2x$.
8. $\ln e^{2x-4} - \ln e^{2x+4} = 2x - 4 - (2x+4) = -8$.
9. $\dfrac{3\ln e^{x+1}}{2\ln e^{1-x}} = \dfrac{3(x+1)}{2(1-x)} = \dfrac{3x+3}{2-2x}$.

Exercice n°2

1. $\ln(3x-4) = \ln(2x+1)$.
   — **Domaine de définition :** il faut que $\begin{cases} 3x-4>0 \\ 2x+1>0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x > \dfrac{4}{3} \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases}$, donc que $x > \dfrac{4}{3}$.
   — **Résolution :** $\ln(3x-4) = \ln(2x+1) \iff 3x - 4 = 2x + 1 \iff x = 5$.
   $5 > \dfrac{4}{3}$ donc l'ensemble solution est $\mathcal{S} = \{5\}$
2. $\ln(4-2x) = \ln(x-1)$.
   — **Domaine de définition :** il faut que $\begin{cases} 4-2x>0 \\ x-1>0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x<2 \\ x>1 \end{cases}$, donc que $1 < x < 2$.
   — **Résolution :** $\ln(4-2x) = \ln(x-1) \iff 4 - 2x = x - 1 \iff 5 = 3x \iff x = \dfrac{5}{3}$.
   $1 < \dfrac{5}{3} < 2$ donc l'ensemble solution de l'équation est $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$
3. $\ln(x^2+x+1) = \ln(x^2-2x+1)$.
   — **Domaine de définition :** il faut que $\begin{cases} x^2+x+1>0 \\ x^2-2x+1>0 \end{cases}$.
   Or, le discriminant de x^2+x+1 est égal à -3 donc ce polynôme est toujours strictement positif. De plus, $x^2-2x+1 = (x-1)^2$ donc seul $x = 1$ ne convient pas. Le domaine de définition est donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   — **Résolution :**
   $$\begin{aligned} &\ln(x^2+x+1) = \ln(x^2-2x+1) \\ \iff\ & x^2+x+1 = x^2-2x+1 \\ \iff\ & 3x = 0 \\ \iff\ & x = 0. \end{aligned}$$
   $0 \in \mathcal{D}$ donc l'ensemble solution de l'équation est $\boxed{\mathcal{S} = \{0\}}$
4. $\ln(2x^2-10x+8) = \ln(3x^2-3x-18)$.
   — **Domaine de définition :** il faut que $\begin{cases} 2x^2-10x+8>0 \\ 3x^2-3x-18>0 \end{cases}$.
   Le discriminant de $2x^2-10x+8$ est $\Delta_1 = 100-64 = 36$ et donc ses racines sont $\dfrac{10-6}{4} = 1$ et $\dfrac{10+6}{4} = 4$.
   Le polynôme est donc strictement positif sur $]-\infty;1[\cup]4;+\infty[$.
   Le discriminant de $3x^2-3x-18$ est $\Delta_2 = 9+216 = 225$ et donc ses racines sont $\dfrac{3-15}{6} = -2$ et $\dfrac{3+15}{6} = 3$.
   Le polynôme est donc strictement positif sur $]-\infty;-2[\cup]3;+\infty[$.
   Le domaine de définition est donc $\mathcal{D} =]-\infty;-2[\cup]4;+\infty[$.
5. **Résolution :**
   $$\begin{aligned} &\ln(2x^2-10x+8) = \ln(3x^2-3x-18) \\ \iff\ & 2x^2-10x+8 = 3x^2-3x-18 \\ \iff\ & x^2+7x-26 = 0. \end{aligned}$$
   Le discriminant de $x^2+7x-26$ est $\Delta = 49+104 = 153$ donc il admet deux racines :
   $\dfrac{-7-\sqrt{153}}{2} \in \mathcal{D}$ et $\dfrac{-7+\sqrt{153}}{2} \notin \mathcal{D}$.
   L'ensemble solution de l'équation est donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-7-\sqrt{153}}{2}\right\}}$
6. $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$. Posons $X = \ln x$.
   L'équation devient : $X^2 - 3X + 2 = 0$ et admet pour solutions $X = 1$ et $X = 2$.
   Ainsi, $\ln x = 1$ ou $\ln x = 2$, soit $x = e$ ou $x = e^2$.
   L'ensemble solution est donc $\boxed{\mathcal{S} = \{e\ ;\ e^2\}}$

1. $2(\ln x)^2 - 5\ln x - 3 = 0$. Posons $X = \ln x$.
   L'équation devient $2X^2 - 5X - 3 = 0$ et admet pour solutions $X = 3$ et $X = -\dfrac{1}{2}$.
   Ainsi, $\ln x = 3$ ou $\ln x = -\dfrac{1}{2}$, soit $x = e^3$ ou $x = e^{-0,5} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.
   L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \{e^3\ ;\ e^{-0,5}\}$.

Exercice n°3

Résolution d'équations et d'inéquations.

1. — Pour résoudre l'équation $\ln(5x-1) = 2$, il faut avant tout trouver son domaine de définition.
   $\ln(5x-1)$ est défini pour tout réel x tel que $5x-1>0$, soit $x > \dfrac{1}{5}$.

Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $\left]\frac{1}{5};+\infty\right[$.

— $\ln(5x-1)=2 \iff e^{\ln(5x-1)}=e^2$
$\iff 5x-1=e^2$
$\iff 5x=e^2+1$
$\iff x=\dfrac{e^2+1}{5}$

— On vérifie que la valeur trouvée est bien dans le domaine de définition en en trouvant une valeur approchée.
Par conséquent, $S=\left\{\dfrac{e^2+1}{5}\right\}$.

2. $e^{-x}=5 \iff \ln\left(e^{-x}\right)=\ln(5)$
$\iff -x=\ln(5)$
$\iff x=-\ln(5)=\ln\dfrac{1}{5}$

Par conséquent, $S=\{-\ln 5\}$.

3. — Pour résoudre l'inéquation $\ln(3x-1)<0$, il faut avant tout trouver son domaine de définition.
$\ln(3x-1)$ est défini pour tout réel x tel que $3x-1>0$, soit $x>\dfrac{1}{3}$.
Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.

— $\ln(3x-1)<0 \iff e^{\ln(3x-1)}<e^0$
$\iff 3x-1<1$
$\iff 3x<2$
$\iff x<\dfrac{2}{3}$

— On trouve l'intersection de l'intervalle $]-\infty;\frac{2}{3}[$ et du domaine de définition $]\frac{1}{3};+\infty[$. Par conséquent, $S=\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$.

4. $e^{5-x}\leqslant 2\ln\left(e^{5-x}\right)\leqslant\ln(2)$
$\iff 5-x\leqslant\ln(2)$
$\iff -x\leqslant\ln(2)-5$
$\iff x\geqslant 5-\ln(2)$

Par conséquent, $S=]5-\ln(2);+\infty[$.

Exercice n°4

Résolutions d'inéquations.

1. $\ln(5x+20)>\ln(3x-9)$.

— **Domaine de définition :** il faut que $\begin{cases}5x+20>0\\3x-9>0\end{cases}$, soit $x>3$.
Le domaine de définition est donc $\mathcal{D}=]3;+\infty[$.

— **Résolution :** $\ln(5x+20)>\ln(3x-9)$
$\iff 5x+20>3x-9$
$\iff 2x>-29$
$\iff x>-\dfrac{29}{2}$.

Notons $\mathcal{U}=\left]-\frac{29}{2};+\infty\right[$; alors, l'ensemble solution de l'inéquation est $\mathcal{U}\cap\mathcal{D}$, soit $\mathcal{S}=]3;+\infty[$.

— **Domaine de définition :** il faut que $\begin{cases}8-2x>0\\5x-25>0\end{cases}$, soit $\begin{cases}x<4\\x>5\end{cases}$, donc le domaine de définition est $]-\infty;4[\cup]5;+\infty[$.

— **Résolution :** $\ln(8-2x)\leqslant\ln(5x-25)$
$\iff 8-2x\leqslant 5x-25$
$\iff 8+25\leqslant 5x+2x$
$\iff 7x\geqslant 33$
$\iff x\geqslant\dfrac{33}{7}$.

Notons $\mathcal{U}=\left]\frac{33}{7};+\infty\right[$; l'ensemble solution de l'inéquation est alors $\mathcal{U}\cap\mathcal{D}$, soit $\mathcal{S}=]5;+\infty[$

2. $\ln(x^2+1)<\ln(2x^2+x+2)$.

— **Domaine de définition :** il faut que $\begin{cases}x^2+1>0\\2x^2+x+2>0\end{cases}$, ce qui est toujours le cas car le discriminant des polynômes x^2+1 et $2x^2+x+2$ sont strictement négatifs.
Le domaine de définition est donc $\mathbb{R}$.

— **Résolution :** $\ln(x^2+1)<\ln(2x^2+x+2)$
$\iff x^2+1<2x^2+x+2$
$\iff x^2+x+1>0$.

Le discriminant de x^2+x+1 étant strictement négatif, tout réel x convient.
L'ensemble solution de cette inéquation est donc $\mathcal{S}=\mathbb{R}$.

3. $\ln(2x^2-3x+1)>\ln(-5x^2+8x-3)$.

— **Domaine de définition :** les racines de $2x^2-3x+1$ sont 1 et $\frac{1}{2}$;
ainsi, $2x^2-3x+1>0$ sur $I=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$.
Les racines de $-5x^2+8x-3$ sont 1 et $\frac{3}{5}$ donc $-5x^2+8x-3>0$ sur $J=\left]\frac{3}{5};1\right[$.
Le domaine de définition est donc $I\cap J=\varnothing$.

— **Résolution :** le domaine de définition étant l'ensemble vide, il ne peut y avoir de solutions à cette inéquation. Donc $\mathcal{S}=\varnothing$.

4. $\ln(x^2-5x-14)\geqslant\ln(2x^2-10x+8)$.

— **Domaine de définition :** le polynôme $x^2-5x-14$ admet pour racines -2 et 7 donc il est strictement positif sur $I=]-\infty;-2[\cup]7;+\infty[$.
Le polynôme $2x^2-10x+8$ admet pour racines 4 et 1 donc il est strictement positif sur $J=]-\infty;1[\cup]4;+\infty[$.

Le domaine de définition est donc $I\cap J$, soit $\mathcal{D}=]-\infty;-2[\cup]7;+\infty[$.

— **Résolution :** $\ln(x^2-5x-14)\geqslant\ln(2x^2-10x+8)$
$\iff x^2-5x-14\geqslant 2x^2-10x+8$
$\iff x^2-5x+22\leqslant 0$.

Le discriminant de $x^2-5x+22$ est $\Delta=25-108<0$ donc le polynôme est toujours strictement positif.

L'ensemble solution de l'inéquation est donc $\mathcal{S}=]-\infty;-2[\cup]7;+\infty[$.

5. $\ln(x^2+x-6)>\ln(-2x^2+14x+16)$.

— **Domaine de définition :** le polynôme x^2+x-6 admet pour racines 2 et -3 donc il est strictement positif sur $I=]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$.
Le polynôme $-2x^2+14x+16$ admet pour racines -1 et 8 donc il est strictement positif sur $J=]-1;8[$.

Le domaine de définition est donc $I\cap J$, soit $\mathcal{D}=]-2;8[$.

— **Résolution :** $\ln(x^2+x-6)>\ln(-2x^2+14x+16)$

$\iff x^2+x-6>-2x^2+14+16$

$\iff 3x^2-13x-22>0.$

Le discriminant du polynôme $3x^2-13x-22$ est $\Delta=169+12\times 22=433$ donc il admet deux racines : $x_1=\dfrac{13-\sqrt{433}}{6}\notin\mathcal{D}$ et $x_2=\dfrac{13+\sqrt{433}}{6}\in\mathcal{D}$.
Ainsi, $3x^2-13x-22>0$ sur $\mathcal{U}=]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$.

L'ensemble solution de l'inéquation est donc $\mathcal{U}\cap\mathcal{D}$, soit $\mathcal{S}=\left]\dfrac{13+\sqrt{433}}{6};8\right[$

Exercice n°5

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\ln x-x.$$

1. $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1.$
   Or, pour $x\geqslant 1$, $0<\dfrac{1}{x}\leqslant 1$, et donc $f'(x)\leqslant 0$.
   La fonction f est donc décroissante sur $[1;+\infty[$.
2. $f(1)=-1$, donc $f(x)<0$ sur $[1;+\infty[$. Donc $\ln x<x$ sur cet intervalle.
   De plus, on sait que pour $x\geqslant 1$, $\ln x\geqslant 0$.
   On en déduit alors que sur $[1;+\infty[$, $0\leqslant\ln x<x$.
3. Posons $x=\sqrt{u}$, $u\geqslant 1$.
   Alors, de ce qui précède, on déduit que
   $$0\leqslant\ln\sqrt{u}<\sqrt{u}.$$
   Ainsi, en divisant par u, on a :
   $$0\leqslant\frac{\ln\sqrt{u}}{u}<\frac{\sqrt{u}}{u},$$
   on encore :
   $$0\leqslant\frac{\frac{1}{2}\ln u}{u}<\frac{1}{\sqrt{u}}.$$
   Que l'on mette u ou x importe peu. Ainsi,
   $$\forall x\in[0;+\infty[,\ 0\leqslant\frac{\ln x}{2x}<\frac{1}{\sqrt{x}}.$$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{2x}=0$.
   Multiplier l'expression par $\dfrac{1}{2}$ ne change pas la limite, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

Exercice n°6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2}\ln\left(x^2+1\right).$$

1. Nous savons que $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(X+1)}{X}=1$. Ainsi, en posant $X=x^2$, on a :
   $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2}=1.$$
   De plus, $\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\left((x-1)\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2}\right)=-1$.
   Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1.}$
2. Nous pouvons écrire, sur $\mathbb{R}*$:
   $$f(x)=\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}-\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\times\frac{x^2+1}{x^2}$$
   — $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln X}{X}=0$, donc en posant $X=x^2+1$, nous avons :
   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=0.$$
   De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1.$
   Ainsi,
   $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\times\frac{x^2+1}{x^2}\right)=0. \qquad (1)$$
   — $\ln\left(x^2+1\right)=\ln\left[x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=2\ln x+\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.
   Ainsi, $\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}=2\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

   Posons $g(x)=\ln(1+x)-x$, pur $x\geqslant 0$.
   Alors, $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1<0$ pour $x\geqslant 0$ donc g est décroissante sur $[0;+\infty[$.
   De plus, $g(0)=0$ donc cela signifie que $g(x)\leqslant 0$ sur $[0;+\infty[$.
   Ainsi, pour $x\geqslant 0$, $\ln(1+x)\leqslant x$ et donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\leqslant\dfrac{1}{x^2}$, soit $\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\leqslant\dfrac{1}{x^3}$.
   $\dfrac{1}{x}>0$ donc $1+\dfrac{1}{x^2}>1$, d'où $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)>0$ et finalement $\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)>0$.
   Ainsi, $0<\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\leqslant\dfrac{1}{x^3}$.
   On en déduit alors que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=0$ (théorème des gendarmes).
   De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ donc
   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}=0. \qquad (2)$$
   — Finalement, des égalités (1) et (2), on en déduit :
   $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

3. D'après la question précédente,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2}=0.$$

De plus, en écrivant pour $x<0$:

$$\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}=2\frac{\ln|x|}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right),$$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln|x|}{x}=0.$

De plus, on a toujours $0<\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\leqslant\frac{1}{x^2}$ et donc $\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)<0$ pour $x<0$.

Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=0$ (théorème des gendarmes).

Finalement,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}=0.$$

Alors,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0.$$

Exercice n°7

Calcul de limites.

1. Nous savons que $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0.$

Posons $X=\sqrt{x^2-1}$. Alors, $\lim\limits_{x\to-\infty}X=+\infty$.

De plus, $\frac{\ln\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}=\frac{\ln X}{X^2}=\frac{\ln X}{X}\times\frac{1}{X}$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\frac{\ln X}{X}\times\frac{1}{X}\right)$. Or, $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{X}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}\right)=0.}$$

2. $\frac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{(x-1)^2}=\frac{\ln\left[(x-1)^2+1\right]}{(x-1)^2}=\frac{\ln(X+1)}{X}$, avec $X=(x-1)^2$.

$\lim\limits_{x\to1}X=0$ donc $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{(x-1)^2}\right)=\lim\limits_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1.$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to1}\left(\frac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{(x-1)^2}\right)=1.}$$

3. Posons $f(X)=\ln\left(1-X^2\right)$ et $g(x)=\ln(1+X)$, avec $X=\frac{1}{x}$.

Alors, $\lim\limits_{x\to+\infty}X=0$, et $f(0)=g(0)=\ln 1=0$.

$$\begin{aligned}\frac{f(X)}{g(X)}&=\frac{f(X)-f(0)}{g(X)-g(0)}\\&=\frac{f(X)-f(0)}{X-0}\times\frac{X-0}{g(X)-g(0)}\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{X\to0}\frac{f(X)}{g(X)}=\lim_{X\to0}\left[\frac{f(X)-f(0)}{X-0}\times\frac{X-0}{g(X)-g(0)}\right]$$

Or, $\lim\limits_{X\to0}\frac{f(X)-f(0)}{X-0}=f'(0)$ et $\lim\limits_{x\to0}\frac{X-0}{g(X)-g(0)}=\frac{1}{g'(0)}$.

$f'(X)=\frac{-2X}{1-X^2}$ et $g'(X)=\frac{1}{1+X}$.

Ainsi,

$$\lim_{X\to0}\frac{f(X)}{g(X)}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{0}{1}=0$$

et donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)=0.}$$

4. On peut écrire :

$$\begin{aligned}&\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-\sqrt{x+1}}\\&=\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x+1}}\times\frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\\&=\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{1-(x+1)}\\&=\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{-x}\\&=\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\times\frac{\cancel{\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{-\sqrt{x}\times\cancel{\sqrt{x}}}\\&=\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\times\left(-\frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x}}\right).\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}=\lim_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\blacktriangleright\ \lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}=0^+\\ \blacktriangleright\ \lim\limits_{X\to0^+}\left(-\frac{1}{X}\right)=-\infty\\ \blacktriangleright\ \lim\limits_{x\to0}\left(1+\sqrt{x+1}\right)=2\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{-\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x}}=-\infty$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-\sqrt{x+1}}\right)=-\infty.$$

Exercice n°8

Calcul de dérivées.

1. $f_1(x) = x\ln x - x$.
La fonction $x \mapsto x\ln x$ est de la forme uv avec :
$$\begin{array}{lcl} u(x) = x & ; & u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln x & ; & v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}$$
donc sa dérivée est :
$$(u'v + uv')(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$
Ainsi,
$$f_1'(x) = \ln x + 1 - 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f_1'(x) = \ln x}$$
$f_1'(x) = \ln x$.

2. $f_2(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ donc f_2 est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :
$$\begin{array}{lcl} u(x) = \ln x & ; & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x & ; & v'(x) = 1 \end{array}$$
donc
$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2}(x) \\ &= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} \\ f_2'(x) &= \frac{1 - \ln x}{x^2}. \end{aligned}$$

3. $f_3(x) = \ln\left(x^2\right)$ donc f_3 est de la forme $\ln u$, avec
$$u(x) = x^2 \qquad \text{et} \qquad u'(x) = 2x.$$
Donc
$$\begin{aligned} f_3'(x) &= \frac{u'}{u}(x) \\ &= \frac{2x}{x^2} \\ f_3'(x) &= \frac{2}{x}. \end{aligned}$$

4. $f_4(x) = \ln\sqrt{x+1}$ donc f_4 est de la forme $\ln u$ avec $u(x) = \sqrt{x+1}$.
u est de la forme $\sqrt{g}$, avec $g(x) = x + 1$ donc $u'(x) = \dfrac{g'}{2\sqrt{g}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.
Ainsi,
$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \frac{u'}{u}(x) \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} \\ f_4'(x) &= \frac{1}{2(x+1)}. \end{aligned}$$

5. $f_5(x) = \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$ donc f_5 est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :
$$u(x) = \ln\left(x^2+1\right) \qquad \text{et} \qquad v(x) = x^2 + 1.$$
u est de la forme $\ln g$, avec $g(x) = x^2 + 1$ donc :
$$u'(x) = \frac{u'}{u}(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} f_5'(x) &= \frac{u'v - v'u}{v^2}(x) \\ &= \frac{\frac{2x}{x^2+1} \times \left(x^2+1\right) - 2x \times \ln\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \frac{2x - 2x\ln(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \\ f_5'(x) &= \frac{2x\left[1 - \ln(x^2+1)\right]}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

6. $f_6(x) = \ln\left(\ln x\right)$ donc f_6 est de la forme $\ln u$ avec :
$$u(x) = \ln x \qquad \text{et} \qquad u'(x) = \frac{1}{x}.$$
Donc
$$\begin{aligned} f_6'(x) &= \frac{u'}{u}(x) \\ &= \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \\ f_6'(x) &= \frac{1}{x\ln x}. \end{aligned}$$

Exercice n°9

L'étudier de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}.$$

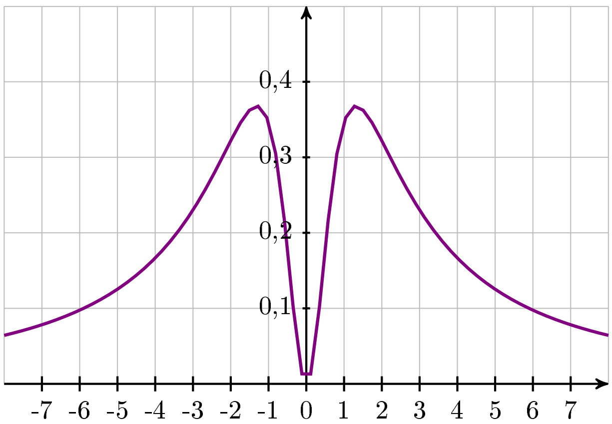
— $f(-x) = f(x)$ et le domaine de définition de f est centré en 0.
La fonction f est donc paire. On peut donc l'étudier sur $[0; +\infty[$.

— $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x^2+1\right) = +\infty$
$\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$
De plus, $f(0) = \dfrac{\ln 1}{1} = 0$.

— D'après l'exercice précédent,
$f'(x) = \dfrac{2x\left[1 - \ln\left(x^2+1\right)\right]}{\left(x^2+1\right)^2}$.
Sur $[0; +\infty[$, $2x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln\left(x^2+1\right)$.
$$\begin{aligned} 1 - \ln\left(x^2+1\right) > 0 &\iff \ln\left(x^2+1\right) < 1 \\ &\iff x^2 + 1 < e^1 \\ &\iff x^2 < e - 1 \\ &\iff 0 < x < \sqrt{e-1} \end{aligned}$$
On obtient alors le tableau de variations page suivante.

x	$-\infty$		$-\sqrt{e-1}$		0		$\sqrt{e-1}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{e-1}\right) &= \frac{\ln(e-1+1)}{e-1+1} \\ &= \frac{1}{e} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$



Exercice n°10

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

1. Déterminer son domaine de définition.
2. Calculer $f'(x)$ puis déterminer le sens de variations de f sur son domaine de définition.
3. Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de son domaine de définition.

   Dresser un tableau de variations complet de la fonction f.

Exercice n°11

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-1)\ln\left(x^2 - 2x + 1\right).$$

1. Donner le domaine de définition de f. On le notera $\mathcal{D}$.
2. Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Trouver le signe de $f'(x)$ sur $\mathcal{D}$, puis en déduire les variations de f sur $\mathcal{D}$.
   Dresser un tableau de variations complet de f.

Exercice n°12

Dans cet exercice, on acceptera la propriété suivante :

Pour tous réels a et b, $\qquad a\ln b = \ln\left(b^a\right)$.

On considère la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par :

$$f(x) = e\ln x - x.$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
3. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f. Dresser un tableau de variations de f.
4. Comparer alors les nombres π^e et e^π.

Exercice n°13

Lorsque l'on prend des antibiotiques, la concentration de bactéries présentes dans le corps d'une personne malade diminue avec le temps en suivant le modèle d'une fonction f définie, pour $0 \leqslant t \leqslant 6$, par :

$$f(t) = ae^{kt} + b \quad , \quad a, b, k \text{ étant trois réels, avec } a \neq 0,$$

où t désigne le temps (exprimé en jour) et où $f(t)$ représente le taux de bactéries restantes.
Ainsi, $f(0) = 1$. On suppose que la totalité des bactéries sont éliminées après 6 jours. Donc $f(6) = 0$.

1. Montrer que $f(t) = ae^{\frac{1}{6}\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)t} + 1 - a$.

2. On sait que 50% des bactéries disparaissent au bout de deux jours.

   En déduire que $ae^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)} + \dfrac{1}{2} - a = 0$.

   Pour tout nombre réel $x > 1$, on pose :

$$g(x) = xe^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} - x + \frac{1}{2}.$$

3. Montrer que $g'(x) = \left(1 + \dfrac{1}{3x-3}\right)e^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} - 1$.

4. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} g'(x)$.

   (b) On admet que $g''(x) = \dfrac{-2}{9x(x-1)}e^{\frac{1}{3}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$.

   En déduire les variations de la fonction g' puis celles de la fonction g sur $]1;+\infty[$.

5. Montrer alors que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur $]1{,}3;1{,}4[$.

   On admet que $\alpha \approx 1{,}309$.

Exercice n°14

Soit f la fonction définie pour tout réel $x > -1$ par :

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 6x - 1.$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = \ln(x+1) - 5$.
3. En déduire les variations de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur $\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$ et une autre sur $[395;400]$.
   En donner une valeur approchée au millième.

Exercice n°15

A : étude d'une fonction auxiliaire
On considère la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x + \frac{x^2 - x + 1}{2x^2}.$$

1. Montrer que sa dérivée est : $h'(x) = \dfrac{2x^2 + x - 2}{2x^3}$.
2. étudier le signe de $h'(x)$ sur $]0;+\infty[$.
3. Dresser un tableau de variations de h sur $]0;+\infty[$.
   En déduire le signe de $h(x)$ sur $]0;+\infty[$.

B : étude d'une fonction
On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(x^2 + 1\right) \ln x - x.$$

1. Calculer sa dérivée puis montrer l'équivalence suivante :

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow h(x) > 0.$$

2. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.
3. (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   (c) Dresser un tableau de variations complet de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α, sur $]0;+\infty[$.
   (b) Montrer que α appartient à l'intervalle $]1;2[$.
   (c) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.