

Série d'exercices

Corrigés

Classe : Tle Spé Maths

Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Simplifier au maximum les expressions suivantes.

- $\ln 8 - \ln 2$.
- $\ln 6 + \ln 3$.
- $\ln 25 - \ln 30 + \ln 10$.
- $\ln 50 + \ln 2 - \ln 10$.
- $3 \ln 4 - \ln 256$.
- $2 \ln 2 - \ln 16 + \ln 128$.
- $\ln e^{2x}$.
- $\ln e^{2x-4} - \ln e^{2x+4}$.
- $\frac{3 \ln e^{x+1}}{2 \ln e^{1-x}}$.

Exercice n°2

Résoudre les équations suivantes.

- $\ln(3x - 4) = \ln(2x + 1)$.
- $\ln(4 - 2x) = \ln(x - 1)$.
- $\ln(x^2 + x + 1) = \ln(x^2 - 2x + 1)$.
- $\ln(2x^2 - 10x + 8) = \ln(3x^2 - 3x - 18)$.
- $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$.
- $2(\ln x)^2 - 5 \ln x - 3 = 0$.

Exercice n°3

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

- $\ln(5x - 1) = 2$.
- $e^{-x} = 5$.
- $\ln(3x - 1) < 0$.
- $e^{5-x} \leq 2$.

Exercice n°4

Résoudre les inéquations suivantes.

- $\ln(5x + 20) > \ln(3x - 9)$.
- $\ln(8 - 2x) \leq \ln(5x - 25)$.
- $\ln(x^2 + 1) < \ln(2x^2 + x + 2)$.
- $\ln(2x^2 - 3x + 1) > \ln(-5x^2 + 8x - 3)$.
- $\ln(x^2 - 5x - 14) \geq \ln(2x^2 - 10x + 8)$.
- $\ln(x^2 + x - 6) > \ln(-2x^2 + 14x + 16)$.

Exercice n°5

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln x - x.$$

- Étudier les variations de f sur $[1; +\infty[$.
- En déduire que pour $x \geq 1$, $0 \leq \ln x < x$.
- Déduire alors que pour $x \geq 1$, $0 \leq \frac{\ln x}{2x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- Calculer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)$.

Exercice n°6

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \ln(x^2 + 1).$$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Indice : on pourra démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leq x$ en étudiant la fonction $g(x) = \ln(1+x) - x$. Cela pourra nous servir dans notre raisonnement.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Exercice n°7

Calculer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 1} \right)$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} \right)$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)}{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \right)$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{1 - \sqrt{x+1}} \right)$.

Exercice n°8

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

- $f_1(x) = x \ln x - x$.
- $f_2(x) = \frac{\ln x}{x}$.
- $f_3(x) = \ln(x^2)$.
- $f_4(x) = \ln \sqrt{x+1}$.
- $f_5(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$.
- $f_6(x) = \ln(\ln x)$.

Exercice n°9

Étudier la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1}.$$

Exercice n°10

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

- Déterminer son domaine de définition.
- Calculer $f'(x)$ puis déterminer le sens de variations de f sur son domaine de définition.
- Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de son domaine de définition.
Dresser un tableau de variations complet de la fonction f .

Exercice n°11

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x - 1) \ln(x^2 - 2x + 1).$$

- Donner le domaine de définition de f . On le notera \mathcal{D} .
- Calculer les limites de f aux bornes de \mathcal{D} .
- Calculer $f'(x)$.
- Trouver le signe de $f'(x)$ sur \mathcal{D} , puis en déduire les variations de f sur \mathcal{D} .
Dresser un tableau de variations complet de f .

Exercice n°12

Dans cet exercice, on acceptera la propriété suivante :

$$\text{Pour tous réels } a \text{ et } b, \quad a \ln b = \ln(b^a).$$

(Dans le cours, nous avons vu qu'elle était vraie pour a entier)

On considère la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par :

$$f(x) = e \ln x - x.$$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f . Dresser un tableau de variations de f .
- Comparer alors les nombres π^e et e^π .

Exercice n°13

Lorsque l'on prend des antibiotiques, la concentration de bactéries présentes dans le corps d'une personne malade diminue avec le temps en suivant le modèle d'une fonction f définie, pour $0 \leq t \leq 6$, par :

$$f(t) = ae^{kt} + b, \quad a, b, k \text{ étant trois réels, avec } a \neq 0,$$

où t désigne le temps (exprimé en jour) et où $f(t)$ représente le taux de bactéries restantes.

Ainsi, $f(0) = 1$. On suppose que la totalité des bactéries sont éliminées après 6 jours. Donc $f(6) = 0$.

- Montrer que $f(t) = a^{\frac{1}{6} \ln(1 - \frac{1}{a})t} + 1 - a$.
- On sait que 50% des bactéries disparaissent au bout de deux jours.
En déduire que $ae^{\frac{1}{3} \ln(1 - \frac{1}{a})} + \frac{1}{2} - a = 0$.

Pour tout nombre réel $x > 1$, on pose :

$$g(x) = xe^{\frac{1}{3} \ln(1 - \frac{1}{x})} - x + \frac{1}{2}.$$

- Montrer que $g'(x) = \left(1 + \frac{1}{3x-3}\right) e^{\frac{1}{3} \ln(1 - \frac{1}{x})} - 1$.

- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x)$.

$$(b) \text{ On admet que } g''(x) = \frac{-2}{9x(x-1)} e^{\frac{1}{3} \ln(1 - \frac{1}{x})}.$$

En déduire les variations de la fonction g' puis celles de la fonction g sur $]1; +\infty[$.

- Montrer alors que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , sur $]1,3; 1,4[$.
On admet que $\alpha \approx 1,309$.

Exercice n°14

Soit f la fonction définie pour tout réel $x > -1$ par :

$$f(x) = (x + 1) \ln(x + 1) - 6x - 1.$$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Montrer que $f'(x) = \ln(x + 1) - 5$.
- En déduire les variations de f .
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ et une autre sur $[395; 400]$.
En donner une valeur approchée au millièm.

Exercice n°15

A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x + \frac{x^2 - x + 1}{2x^2}.$$

- Montrer que sa dérivée est : $h'(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{2x^3}$.
- étudier le signe de $h'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- Dresser un tableau de variations de h sur $]0; +\infty[$.
En déduire le signe de $h(x)$ sur $]0; +\infty[$.

B : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x^2 + 1) \ln x - x.$$

- Calculer sa dérivée puis montrer l'équivalence suivante :
 $f'(x) > 0 \iff h(x) > 0$.
- En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.
- (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
(b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
(c) Dresser un tableau de variations complet de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
- (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α , sur $]0; +\infty[$.
(b) Montrer que α appartient à l'intervalle $]1; 2[$.
(c) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.