Série d'exercices

Corrigés   Classe : Terminale Maths Spé   Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' + \pi y = 1$
2. $y' - 5y = x$

Exercice n°2

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' = 3y - 9$.
2. On pose (E) : $y' = 2y - x^3$.
   (a) Montrer que $y_1(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}$ est une solution particulière de (E).
   (b) En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice n°3

On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - 2y = 7\sin x \qquad \text{(E)}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E) : $y' - 2y = 0$.
2. (a) On pose $f(x) = a\cos x + b\sin x$.
   Trouver la valeur de a et b pour que f soit solution de (E).
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice n°4

On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' + 5y = 12\cos x \qquad \text{(E)}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E) : $y' + 5y = 0$.
2. (a) On pose $f(x) = a\cos x + b\sin x$.
   Trouver la valeur de a et b pour que f soit solution de (E).
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice n°5

Donner une primitive de chacune des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = 5$.
2. $f(x) = 3x + 2$.
3. $f(x) = -8x - 3$.
4. $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$.
5. $f(x) = e^x$.
6. $f(x) = e^{2x}$.
7. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.
8. $f(x) = \dfrac{-5x}{x^2+1}$.
9. $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$.
10. $f(x) = -\frac{1}{3}x^5 + 8x^3 - 7x + 1$.

Exercice n°6

Calculer chacune des intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \dfrac{e^x+1}{e^x+x+1}dx$.
2. $\int_0^1 e^{2x+1}dx$.
3. $\int_3^5 (e^x + x - 3)dx$.
4. $\int_{-1}^1 (3x^3 - 2x)dx$.

Exercice n°7

1. Montrer que $F(x) = x\ln -x$ est une primitive de $f(x) = \ln x$.
2. En déduire $\int_1^e \ln x dx$

Exercice n°8

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}.$$

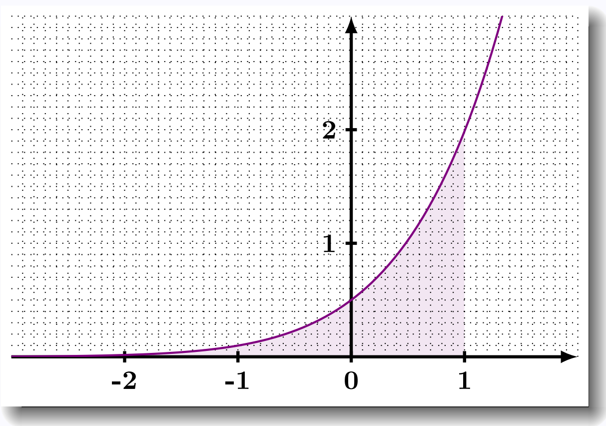
1. Montrer que $\alpha = 1$ est une racine du polynôme $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
2. En déduire ses deux autres racines, que l'on note β et γ, $\beta < \gamma$.
3. Déterminer les réels A, B et C tels que :
$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}$$
Aide : on pourra s'aider de $(x-\alpha)f(x)$, $(x-\beta)f(x)$ et $(x-\gamma)f(x)$.
4. En déduire la valeur de $\int_4^5 f(x)dx$.

Exercice n°9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}.$$

Sa courbe représentative sur $[-3;2]$ est donnée ci-dessous :



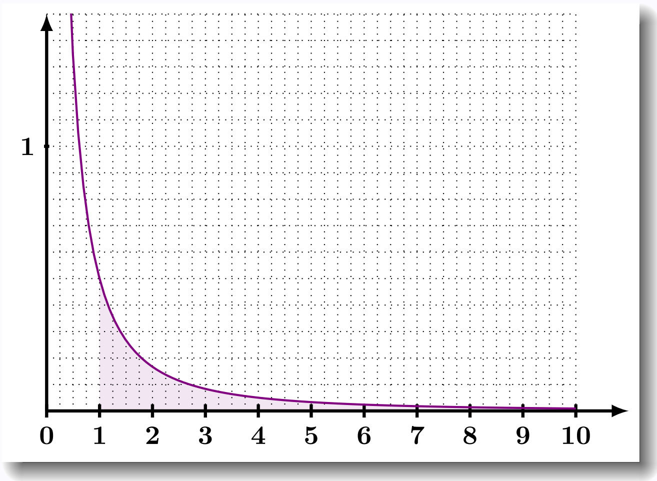
1. À l'aide du quadrillage, donner une valeur approchée de $\int_{-2}^{1} f(x)\, dx$ au dixième.
2. Montrer que $f(x) = e^x - \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
3. En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-4} près de $\int_{-2}^{1} f(x)\, dx$.

Exercice n°10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Sa courbe représentative sur $[0;10]$ est donnée ci-dessous :

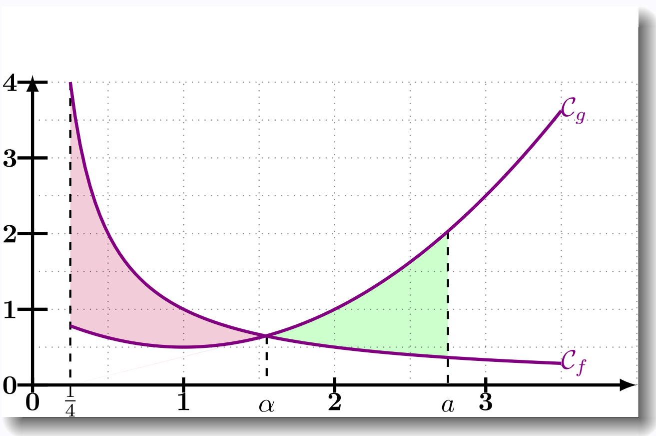


1. À l'aide du quadrillage, montrer que $\int_1^{10} f(x)\, dx \geqslant 0{,}5$.
2. Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.
3. En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-4} près de $\int_1^{10} f(x)\, dx$.

Exercice n°11

On a représenté ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = 0{,}5x^2 - x + 1.$$



On a noté α l'abscisse de leur point d'intersection.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la valeur de a telle que les deux aires colorées soient égales.

1. En vous aidant de la fonction $x \longmapsto 0{,}5x^3 - x^2 + x - 1$, prouver algébriquement l'existence de α, puis déterminer une valeur approchée de α au centième.
2. Déterminer alors une valeur approchée de a.

Exercice n°12

L'objectif de cet exercice est de déterminer une approximation de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$$

où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \left(\ln(1+x)\right)^2.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ avec pour unité graphique : $\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = 10$ cm.

A : étude des variations de la fonction

1. Déterminer la dérivée de f sur $[0;+\infty[$.
2. En déduire les variations de f sur $[0;+\infty[$.
3. Calculer $f(0)$ et $f(1)$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0;1]$.
4. Calculer $f'(0)$. En déduire l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
5. Tracer dans un repère orthonormé $\mathcal{C}$ en faisant apparaître la tangente $\mathcal{T}$.

B : calcul de l'approximation de l'aire

On considère :

— Les points $A_k\left(\dfrac{k}{10};0\right)$ pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant 10$;

— Les rectangles R_k de base $[A_kA_{k+1}]$ et de hauteur $f\left(\dfrac{k}{10}\right)$ pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant 9$.

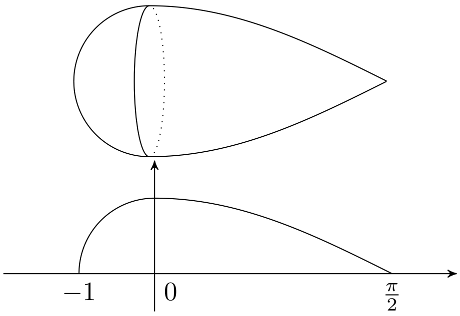
1. Sur le graphique précédent, dessiner les rectangles R_k, $0 \leqslant k \leqslant 9$.
2. Calculer la somme des aires des rectangles R_k pour k compris entre 0 et 9. On donnera le résultat en unité d'aire et en cm^2 à 10^{-3} près.
3. On suppose que la fonction F définie par :

$$F(x) = (x+1)\left[(\ln(x+1))^2 - 2\ln(x+1) + 2\right]$$

est une primitive de f sur $[0;1]$.
En déduire la valeur exacte, puis approchée à 10^{-3} près, de l'aire de $\mathcal{D}$.
Calculez l'erreur entre cette valeur et celle obtenue à la question précédente.

Exercice n°13

Un bouchon de pêche est obtenu à partir d'une courbe que l'on a fait tourner autour de l'axe des abscisses.



L'équation de la courbe est :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1-x^2} & , x \in [-1;0] \\ f(x) = \cos(x) & , x \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Calculer la valeur du volume $\mathcal{V}$ du bouchon.

Aide : on pourra considérer que le volume engendré par une courbe définie par une fonction f sur $[a;b]$ par rotation autour de l'axe des abscisses est égal à $\int_a^b \pi\big[f(x)\big]^2\,dx$.

Exercice n°14

On considère l'intégrale :

$$I = \int_0^4 \sqrt{4x - x^2}\,dx.$$

Montrer que I représente l'aire d'un demi-disque, dont on donnera les caractéristiques, et calculer I.

Exercice n°15

À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \int_1^2 x\sqrt{x}\,dx$
2. $J = \int_0^1 xe^x\,dx$
3. $K = \int_1^e x\ln(x)\,dx$
4. $L = \int_1^e x\big(\ln x\big)^2\,dx$

Exercice n°16

À l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer $S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)e^x\,dx$.

Exercice n°17

On cherche à exprimer pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_1^e x\big(\ln x\big)^n\,dx.$$

Nous avons trouvé I_1 et I_2 dans l'exercice précédent.

1. Montrer que $I_n = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{n}{2}I_{n-1}$.
2. Donner les valeurs exactes de I_n pour $1 \leqslant n \leqslant 5$.
3. D'après ces derniers résultats, on peut aisément supposer que $I_n = a_n e^2 + b_n$.

   Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1-(n+1)a_n) \\ b_{n+1} = -\dfrac{n+1}{2}b_n \end{cases}$$

4. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $b_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n!}{2^{n+1}}$.

   On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{1}{2} + n!\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}(n-k)!}.$$

5. Écrire un programme Python permettant d'afficher la valeur exacte de I_n, pour un entier $n \geqslant 1$. Pour cela, on pourra faire appel au module `fractions` et à sa classe `Fraction` (voir `https://docs.python.org/fr/3.6/library/fractions.html`).

Exercice n°18

1. En intégrant deux fois par parties, calculer $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x\,dx$.
2. On note :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x\,dx.$$

   (a) Calculer $I + J$.
   (b) Calculer $I - J$.
   (c) En déduire I et J.

Exercice n°19

Une machine-outil achetée neuve 10 000 € admet un prix de revente modélisé par la fonction f définie par :

$$f(x) = 10e^{-0{,}2x}$$

où $f(x)$ est exprimé en millier d'euros et x en années.

Déterminer le prix de revente moyen de cette machine sur 8 ans depuis sa date d'achat.

Exercice n°20

En prenant comme année de référence l'an 2000, le nombre d'habitants en fin d'année $2000+x$ d'une ville nouvelle est approchée par la fonction :

$$f(x) = 18e^{0{,}034x}$$

où $f(x)$ est exprimé en millier d'habitants.

Déterminer la population moyenne de cette ville entre 2050 et 2080.