

Série d'exercices

Corrigés

Classe : Terminale Maths Spé

Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Calculer la limite des fonctions suivantes en $+\infty$.

- $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 1$.
- $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
- $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.
- $k(x) = \frac{x^2 + 1}{\sin \frac{1}{x}}$.

Exercice n°2

Déterminer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x}{4+x}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 1}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5x - 7}{x^2 + 3x - 1}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 7x - 9}{x - 1}$.

Exercice n°3

À l'aide d'une expression conjuguée, déterminer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{2x^2 + x + 1})$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3-x} - \sqrt{x^2 - 3})$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5-x} - \sqrt{10-x})$.

Exercice n°4

Calculer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 + 4x - 1}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 3} \right)$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 1})$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x + 1})$.

Exercice n°5

Soit $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.Déterminer la limite de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice n°6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}/\{5\}$ par :

$$f(x) = \frac{-3x + 1}{x - 5}$$

Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale dont on donnera son équation.

Exercice n°7

Déterminer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{7 + 2x}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x}}{3x - 2}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 5)e^{2x}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1}e^{-x}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - \sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}$.

Exercice n°8

À l'aide du théorème de comparaison ou du théorème de gendarmes, calculer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sin x}{x^2}$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(x)e^x$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sin x)$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3}{x - 7 \sin x}$.

Exercice n°9

Déterminer les limites suivantes.

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{3x - 5}{x - 2}$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x - 9}{x - 3}$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - 9x - 5}$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + 8x - 9}$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{3x - 5}{x^2 + 2x - 8}$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{2x^2 + 3x + 1}{-5x^2 - x + 4}$.

Exercice n°10

Calculer les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$.
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} - 2}{x - 2}$.
- $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{2}}{x - 1}$.

Exercice n°11

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables en un nombre réel a telles que $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

On pourra considérer le taux d'accroissement des fonctions f et g en $x = a$.

2. Application : calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(5x) - \cos(3x)}{\sin(4x) - \sin(3x)}$

Exercice n°12

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$.

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2e^{x-1}}{e^{x-1} - 1}$.

Exercice n°13

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]2; +\infty[$ page suivante. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

On suppose de plus que $f(5) = 0$ et que $f'(5) = -2$.

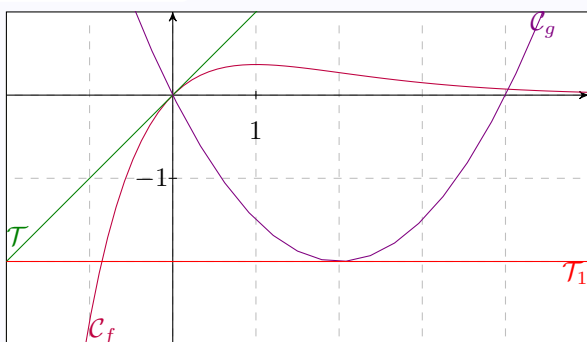
à l'aide du tableau de variations, répondre aux questions suivantes.

Aucune justification n'est demandée.

| | | | | | | |
|---------|---|-----------|-----------------|---------------|----|-----------------|
| x | 2 | 3 | 10 | $+\infty$ | | |
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + |
| f | | $-\infty$ | \rightarrow 6 | \rightarrow | -5 | \rightarrow 4 |

- Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.
- Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$ sur l'intervalle $]2; +\infty[$?

Exercice n°14



- \mathcal{T} est la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.
- \mathcal{T}_1 est la tangente à \mathcal{C}_g au point d'abscisse 2.

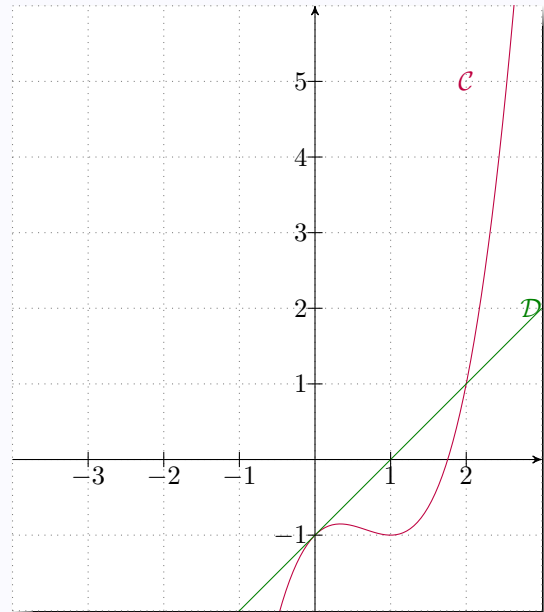
— \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_f se coupent en deux points d'abscisses respectives 0 et 4.

À l'aide du graphique ci-dessus, répondez aux questions suivantes.

- Que vaut $f'(0)$? $g'(2)$?
- Résoudre l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sur $[-2; 5]$.

Exercice n°15

Une fonction f est représentée par la courbe \mathcal{C} ci-dessous.



\mathcal{D} est la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0.

Le point de \mathcal{C} d'abscisse 1 est un minimum local.

Répondre aux questions suivantes par lectures graphiques :

- Donner la valeur de $f(0)$ et $f'(0)$.
- Donner la valeur de $f'(1)$.
- Donner, sur $[-3; 3]$, les solutions de l'équation :

$$f(x) = x - 1.$$

- Dresser un tableau de signes de la fonction f' .

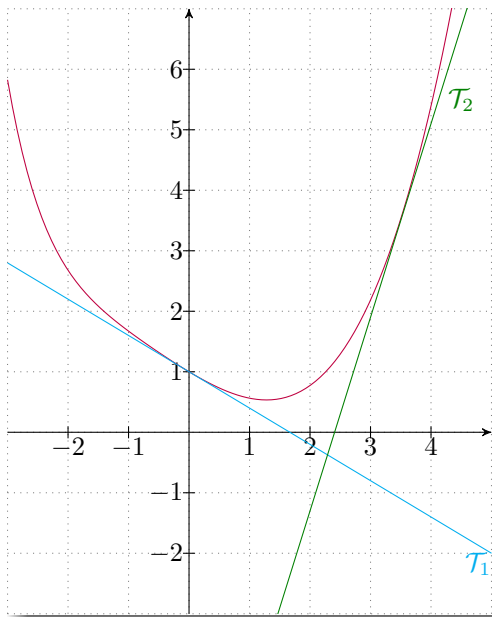
Exercice n°16

La courbe suivante représente une fonction f sur $[-3; 5]$.

La droite \mathcal{T}_1 est tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

La droite \mathcal{T}_2 est tangente à la courbe au point d'abscisse 3,5.

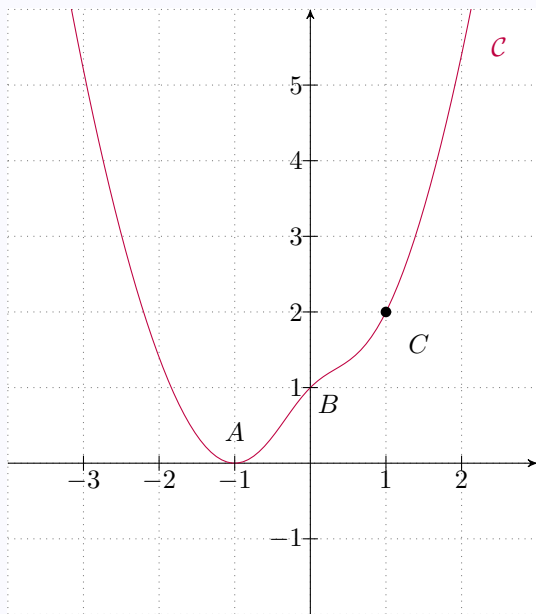
- Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
- Avec la précision que permet le graphique, déterminer $f(3,5)$ et $f'(3,5)$.
- Dresser un tableau de signes de f' avec la précision que permet le graphique.



Exercice n°17

La courbe \mathcal{C} ci-dessous est celle d'une fonction f telle que :

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x^2 + 1}.$$



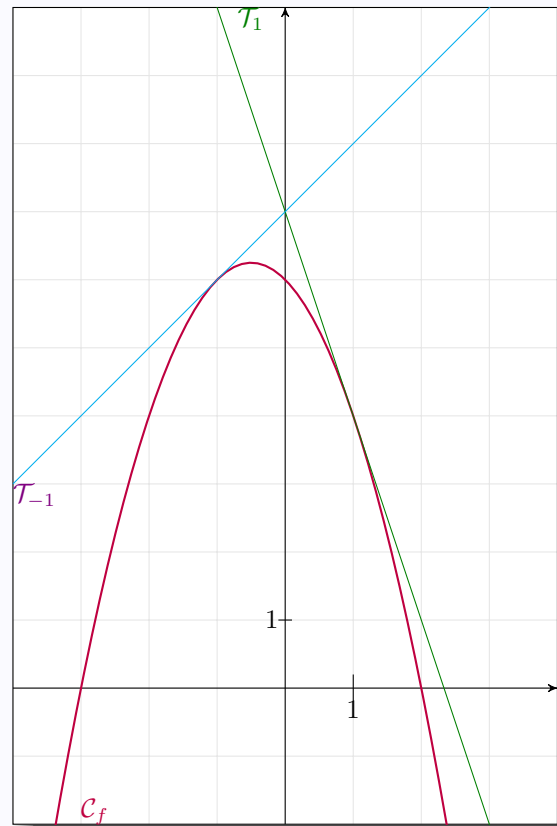
On sait :

- Condition (1) : que les points $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 2)$ appartiennent à \mathcal{C} ;
- Condition (2) : l'axe des abscisses est tangente à \mathcal{C} au point A .

1. Exprimer en fonction de a , b , c et d la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$.
Quelle équation peut-on alors écrire à partir de la condition (2) ?
2. Écrire, en fonction de a , b , c et d , les trois équations que permet d'établir la condition (1).
3. Trouver à l'aide des quatre équations établies, les valeurs de a , b , c et d .

Exercice n°18

On a représenté ci-dessous la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction f ainsi que deux de ses tangentes \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_{-1} .



On sait que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Par lecture graphique, donner la valeur de $f(0)$.
En déduire la valeur de c .
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b .
3. Par lecture graphique, donner la valeur des nombres $f'(1)$ et $f'(-1)$.
En déduire les valeurs de a et b .
4. Par lecture graphique, résoudre l'équation $f(x) = 0$. Retrouver ce résultat par le calcul.

Exercice n°19

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

f est-elle continue sur \mathbb{R} ? Justifier.

Exercice n°20

On définit la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - k & \text{si } x \leq 0 \\ e^x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Pour quelle valeur de k la fonction g est-elle continue sur \mathbb{R} ?

Exercice n°21

On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D} =]-\infty; 0[\cup]0; 4]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{4-x}-2} \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. La fonction f est-elle continue en 2 ?
3. Étudier la dérivabilité de la fonction f sur \mathcal{D} .
4. Interpréter graphiquement les résultats des questions 1 et 3.

Exercice n°22

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

1. f est-elle continue en 1 ?
2. f est-elle dérivable en 1 ?
3. Justifier que f est dérivable pour tout $x \neq 1$.

Exercice n°23

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \cos(x) & \text{si } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1. f est-elle continue en 0 ?
2. f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice n°24

Montrer que l'équation $3x^3 - 5x + 1 = 0$ admet trois solutions réelles dont on donnera une valeur approchée à 0,001 près.

Exercice n°25

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.
Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $[0; 1]$.

Exercice n°26

On considère la fonction f définie sur $[-2; 1]$ par :
 $f(x) = xe^{-x} + 2$.

1. Montrer que $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.
2. En déduire les variations de f .
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α . Donner alors une valeur approchée de α au centième.

Exercice n°27

On injecte par voie intraveineuse un médicament. Le taux du produit dans le sang est modélisé par la fonction :

$$f(t) = (1 - 0,02t)e^{-0,2t}, \quad t \in [0; 50].$$

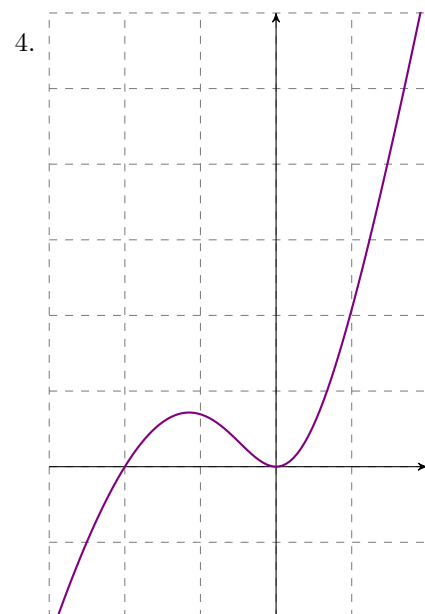
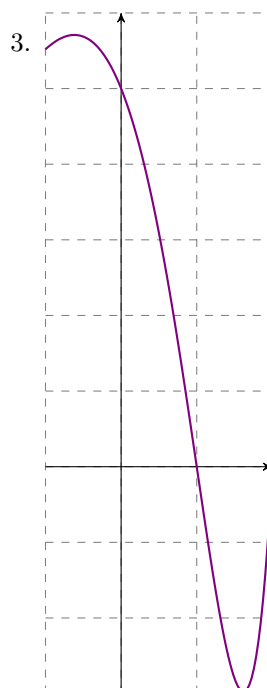
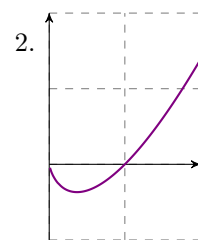
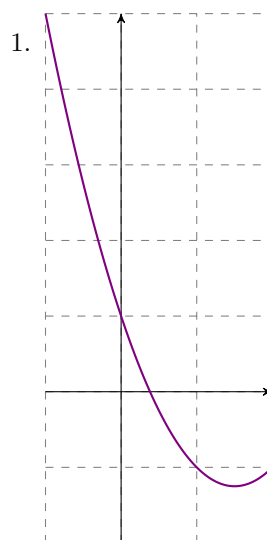
où t représente le temps après injection, exprimé en heures.

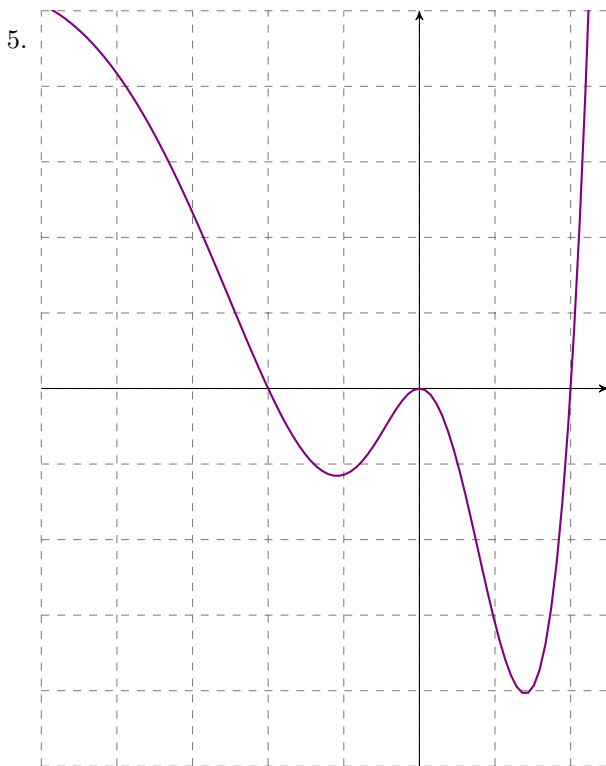
1. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0; 50]$.
2. Montrer que l'équation $f(t) = 0,5$ admet une unique solution sur $[0; 50]$. En Donner alors une valeur approchée au dixième. Interpréter ce résultat.

Exercice n°28

Pour chacune des courbes suivantes, étudier la convexité de la fonction correspondante sur l'intervalle où la courbe est tracée.

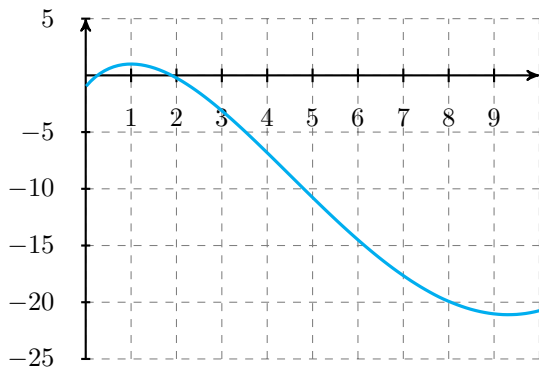
Préciser, s'il y a lieu, la position des points d'inflexion.





Exercice n°29

On considère une fonction f dont la courbe représentative est la suivante :



Placer approximativement son point d'inflexion et préciser les intervalles où f est concave et convexe.

Exercice n°30

Déterminer la convexité de la fonction f définie par $f(x) = xe^{-x}$ sur \mathbb{R} .

Exercice n°31

ors de la propagation d'une rumeur, le nombre d'individus propageant cette rumeur x jours après son commencement est donné, en unité, par la fonction :

$$f(x) = 100 + x^4 e^{-0,1x} \quad \text{pour } x \in [0; 50].$$

- Déterminer le nombre d'individus propageant cette rumeur initialement.

- Prouver que $f'(x) = x^3(4 - 0,1x)e^{-0,1x}$.
 - Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0; 50]$.
- Dans cette question, on admet que la dérivée seconde de f est :

$$f''(x) = x^2 e^{-0,1x} (0,01x^2 - 0,8x + 12).$$

Étudier la convexité de la fonction f sur $[0; 50]$.

- En déduire :
 - le nombre de jours qu'il faut attendre avant que le nombre d'individus propageant cette rumeur diminue (arrondi à l'unité) ;
 - le nombre maximum d'individus propageant cette rumeur (arrondi à l'unité) ;
 - le nombre de jours qu'il faut attendre avant que la croissance du nombre d'individus propageant cette rumeur diminue.

Exercice n°32

La courbe représentative de la fonction f telle que $f''(x) = (x - 1)^2 e^x$ admet-elle un point d'inflexion ?

Exercice n°33

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 1}.$$

- En étudiant la fonction $u : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 1$, déterminer le domaine de définition de $f(x)$.
On notera α la valeur telle que $u(\alpha) = 0$.
- Montrer que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse α est verticale.

Exercice n°34

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}.$$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Montrer que sa dérivée est définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f'(x) = \frac{x + 4\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(2 + \sqrt{x})^2}.$$

- Résoudre l'équation :

$$X^2 + 4X - 1 = 0,$$

puis en déduire le signe de $f'(x)$ ainsi que les variations de f sur $[0; +\infty[$.

Dresser alors un tableau de variations complet de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

On veillera notamment à calculer la valeur de l'extremum de f .