Devoir Maison n°3

Exercice 1 : (8 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de f est donnée sur le document annexe 2 que l'on complétera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}}$

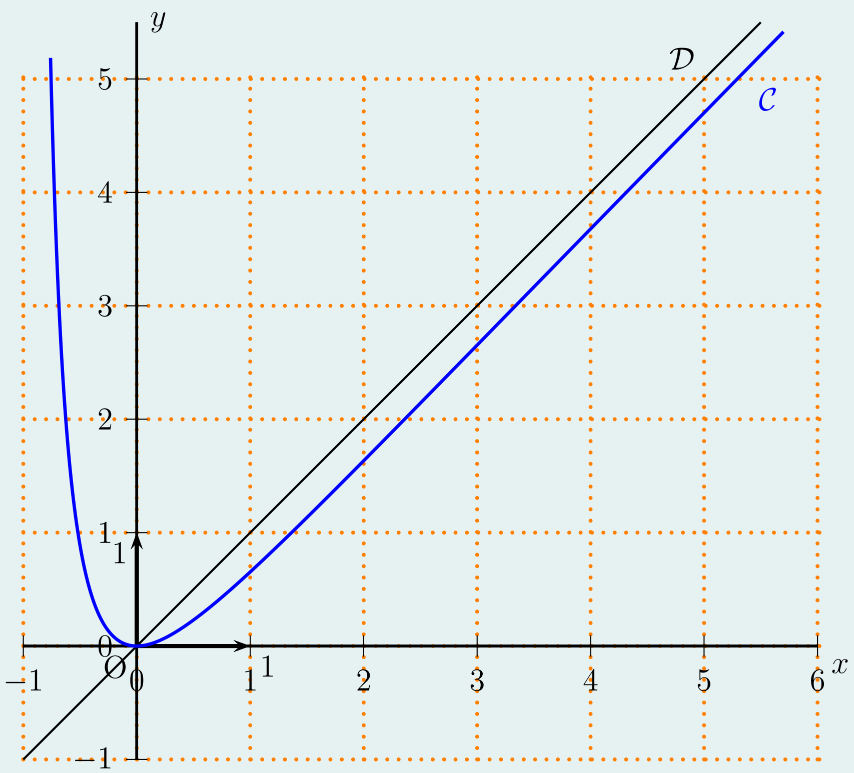
1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.
2. Pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
   Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
   Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction $\boldsymbol{f}$

1. Démontrer que si $x \in [0\ ;\ 4]$, alors $f(x) \in [0\ ;\ 4]$.
2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \quad \text{et} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \ \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

   (a) Sur le graphique ci-dessous, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses u_0 , u_1, u_2 et u_3.



   (b) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0\ ;\ 4]$.
   (c) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   (d) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.
   (e) Utiliser la partie A pour donner la valeur de ℓ.

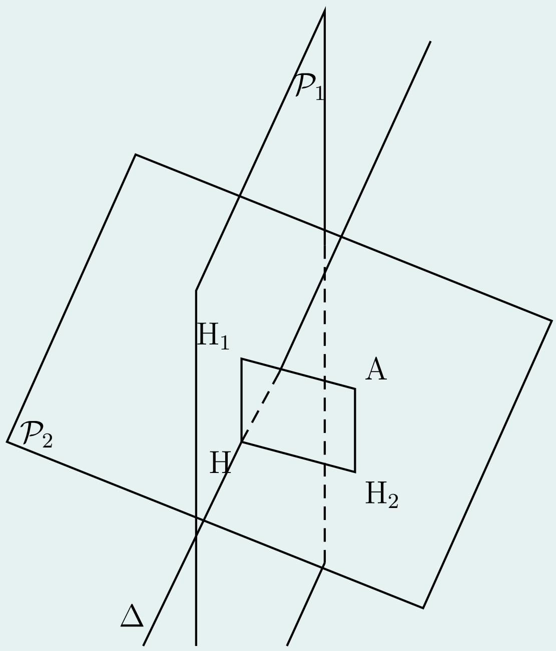
Exercice 2 : (8 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},,\ \overrightarrow{k}\right)$, on considère :

- le plan $\mathcal{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x + y - z + 2 = 0$,
- le plan $\mathcal{P}_2$ passant par le point $\mathrm{B}(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$ et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. (a) Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal au plan $\mathcal{P}_1$.
   (b) On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan.
   Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.
2. (a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$.
   (b) On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -2+t \\ z & = & t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.
   Montrer que la droite Δ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

   On considère le point $\mathrm{A}(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathcal{P}_1$ ni à $\mathcal{P}_2$.
   On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.
3. On rappelle que, d'après la question 2. b, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0\ ;\ -2+t\ ;\ t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.
   (a) Montrer que, pour tout réel t, $\mathrm{A}M_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.
   (b) En déduire que $\mathrm{AH} = \sqrt{3}$.
4. On note $\mathcal{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}_1$.
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$.
   (b) En déduire que le point H_1 a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{5}{3}\right)$.
5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}_2$.
   On admet que H_2 a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{4}{3}\right)$ et que H a pour coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ 2)$.
   Sur le schéma ci-contre, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1, H_2, H.
   Montrer que $\mathrm{AH_1HH_2}$ est un rectangle.



Exercice 3 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{-x^3+2x^2-x+3}{x^2+1}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^2+1}$.
2. Calculer la limite de $f(x) - (ax+b)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. En déduire que $\mathscr{C}$, la courbe représentative de f, admet une asymptote oblique Δ en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de Δ.

Bon courage !