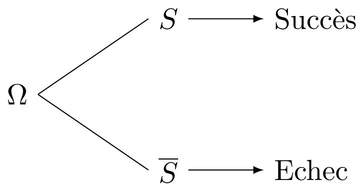
1 Succession d'épreuves indépendantes

1.1 Épreuve de Bernoulli

Définition

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire où seules 2 issues sont possibles : le *succès* (S) et l'*échec* ($\overline{S}$).



Exemples.

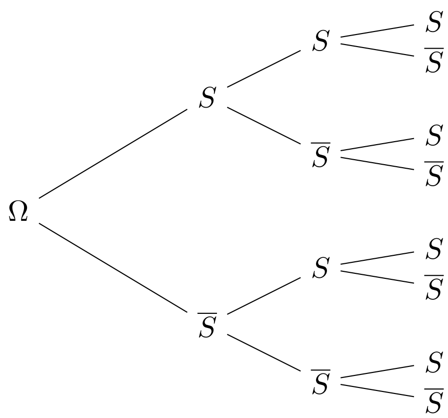
1. Sur une chaîne de production de smartphones, on en choisit un au hasard. L'épreuve consistant à regarder s'il est défectueux est une épreuve de Bernoulli : il est défectueux (S) ou non défectueux ($\overline{S}$).
2. Dans un trousse, on choisit au hasard un stylo. L'épreuve consistant à regarder s'il est rouge est une épreuve de Bernoulli : soit il l'est (S), soit il ne l'est pas ($\overline{S}$).

1.2 Schéma de Bernoulli

Définition

On répète n fois une même épreuve de Bernoulli dans les mêmes conditions (on dit : *de façon indépendante*). Cette succession d'épreuves est appelée un **schéma de Bernoulli**.

On représente un schéma de Bernoulli de la manière suivante :



Exemple de 3 successions d'épreuves de Bernoulli.

2 Loi Binomiale

Définition

On considère une épreuve de Bernoulli dont le succès est de probabilité p.
On note X la variable aléatoire représentant l'issue de cette épreuve : $X(\Omega) = \{S; \overline{S}\}$.
La loi de probabilité de X est appelée *loi de Bernoulli* et est donnée par le tableau suivant :

$X = k$	S	$\overline{S}$
$P(X = k)$	$1 - p$	p

Remarque. L'épreuve de Bernoulli et la loi de Bernoulli tirent leur nom du mathématicien Jacques Bernoulli (1654 – 1705).

2.1 Loi binomiale

Définition

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est p. On répète n fois de façon indépendante cette épreuve, et on note X la variable aléatoire représentant le nombre de succès à l'issue de cette succession d'épreuves.
On dit que la loi de probabilité de X est la **loi binomiale** de paramètres n et p, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$.

À l'issue de ces n épreuves, X peut valoir 0, 1, 2, ... jusqu'à n :

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; \cdots ; n-1; n\}.$$

Propriété. Nombre de chemins à k succès

Si on répète n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli alors il y a $\binom{n}{k}$ chemins comportant exactement k succès.

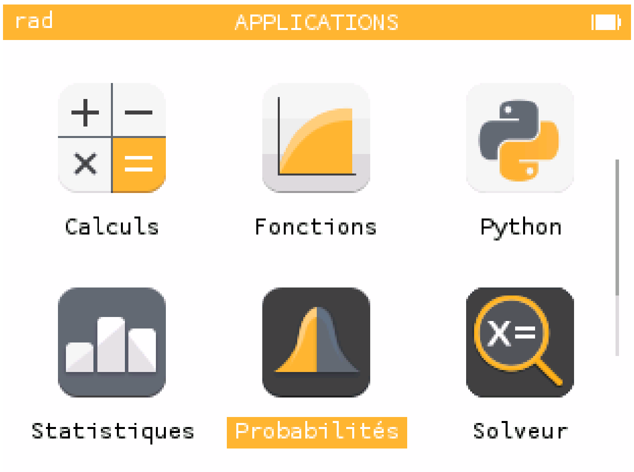
En effet, on regarde combien de « mots » de n lettres (prises dans l'alphabet $\{S; \overline{S}\}$) comportent exactement k lettres « S » : l'ordre compte et les lettres peuvent se répéter. Il s'agit donc d'une combinaison, d'où un nombre égal à $\binom{n}{k}$.

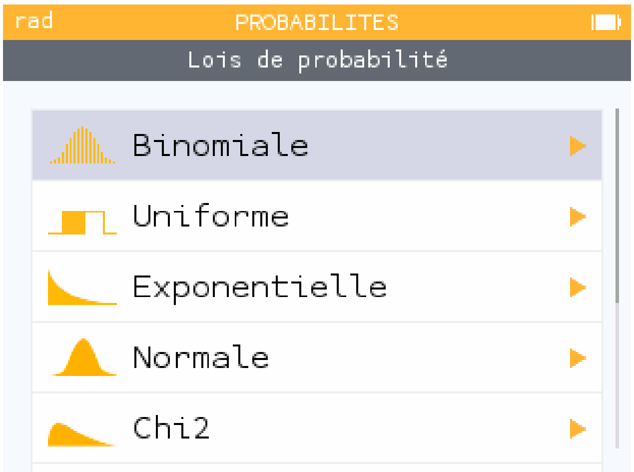
Propriété

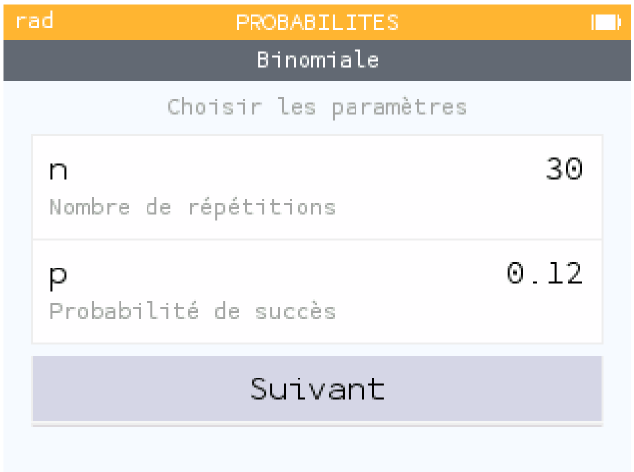
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$.
Alors, pour tout entier k compris entre 0 et n,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Dans la pratique, les calculatrices permettent de donner une valeur approchée de $P(X = k)$ très facilement Par exemple, sur la Numworks, pour une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(30, 12)$:

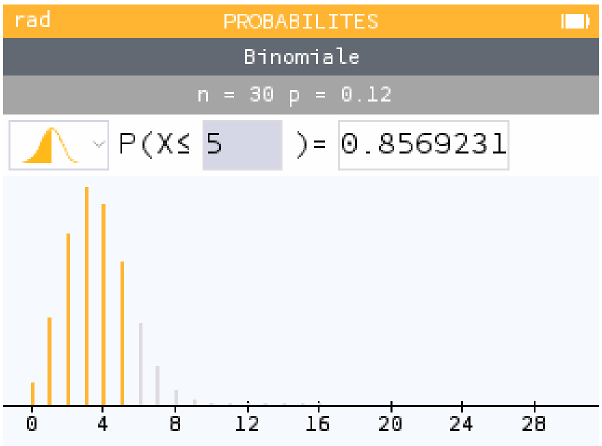




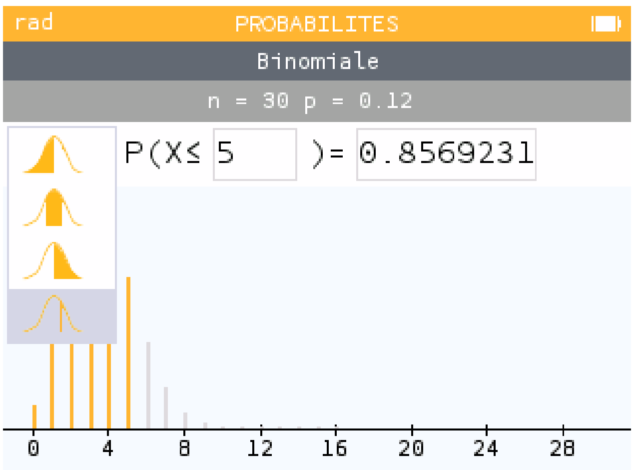


En cliquant sur « Suivant », on peut calculer par exemple :

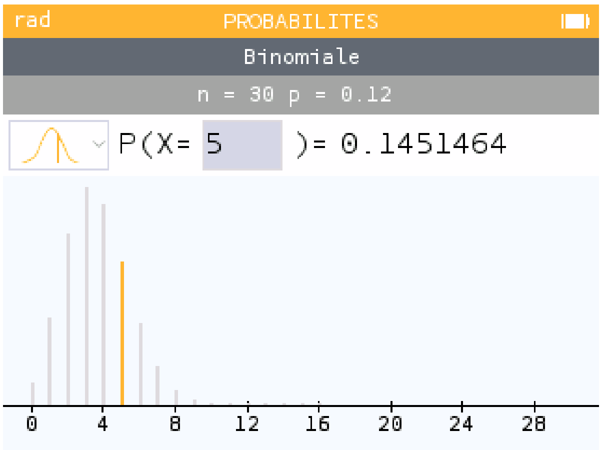
— $P(X \leqslant 5)$:



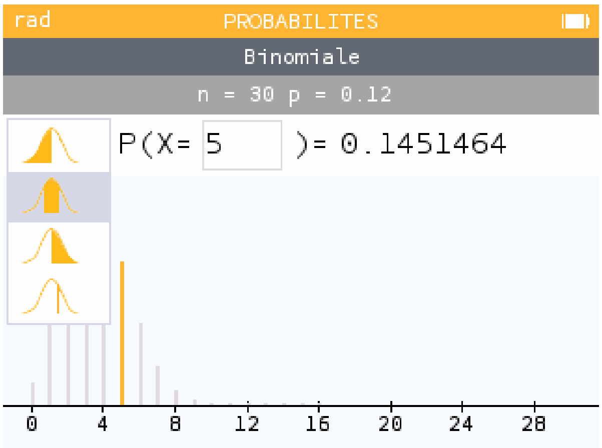
Mais en bougeant le curseur vers la gauche et en cliquant sur l'icône, puis en descendant tout en bas :

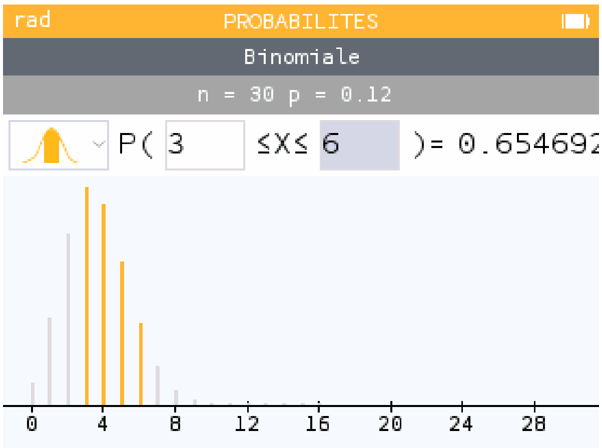


— on peut calculer par exemple $P(X=5)$:



— En sélectionnant, parmi les choix proposés en cliquant sur l'icône à gauche, le deuxième en partant du haut, on peut calculer par exemple $P(3 \leqslant X \leqslant 6)$:





Propriété. Espérance, variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$. Alors,

— son espérance mathématique est : $E(X) = n \times p$;

— sa variance mathématique est : $V(X) = n \times p \times (1-p)$;

— son écart-type est : $\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1-p)}$.

Exemple. Dans un urne, il y a 7 boules bleues et 3 rouges.
On choisit au hasard une boule de cette urne puis on la remet, et on répète cette expérience 10 fois de façon indépendante.
La probabilité de choisir une boule bleue lors d'un tirage est $p = 0,7$.
Si X représente le nombre de boules bleues obtenues à l'issue de ces 10 tirages au sort, alors X suit la loi $\mathcal{B}(n;p)$ et son espérance est :

$$E(X) = 10 \times 0,7 = 7.$$