1 Fonctions sinus et cosinus

1.1 Parité

Définition

— On dit qu'une fonction est **paire** si son domaine de définition $\mathcal{D}$ est centré en 0 et si, pour tout x dans $\mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$.

— On dit qu'une fonction est **impaire** si son domaine de définition $\mathcal{D}$ est centré en 0 et si, pour tout x dans $\mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

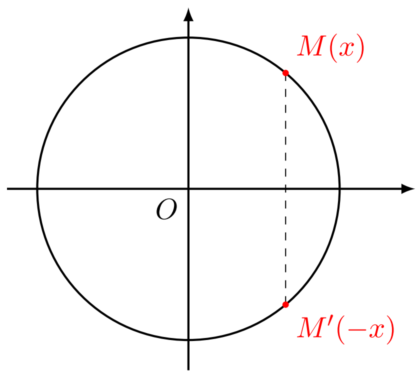
Propriété

— La fonction $x \mapsto \cos x$ est paire.

— La fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire.

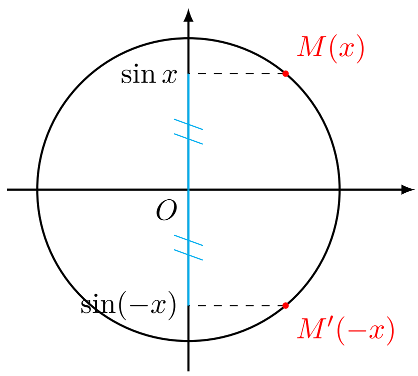
Démonstration

— Fonction $x \mapsto \cos x$.
Son domaine de définition est $\mathbb{R}$, donc centré en 0.
De plus, nous avons :



Ainsi, $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction $x \mapsto \cos x$ est donc paire.

— Fonction $x \mapsto \sin x$.
Son domaine de définition est $\mathbb{R}$, donc centré en 0.
De plus, nous avons :



Ainsi, $\sin(-x) = -\sin(x)$ (car M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses).

1.2 Périodicité

Définition 1.1

On dit qu'une fonction f est ***T*-périodique** si son domaine de définition $\mathcal{D}$ est centré en 0 et si, pour tout réel de $\mathcal{D}$,

$$f(x+T) = f(x).$$

Propriété

Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont 2π-périodiques.

Démonstration

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π. Ainsi, les nombres x et $x+2\pi$ auront la même image sur le cercle trigonométrique, ce qui signifie que :

$$\cos(x) = \cos(x+2\pi) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \sin(x+2\pi).$$

De plus, les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ (qui est centré en 0).
Donc $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont 2π-périodiques.

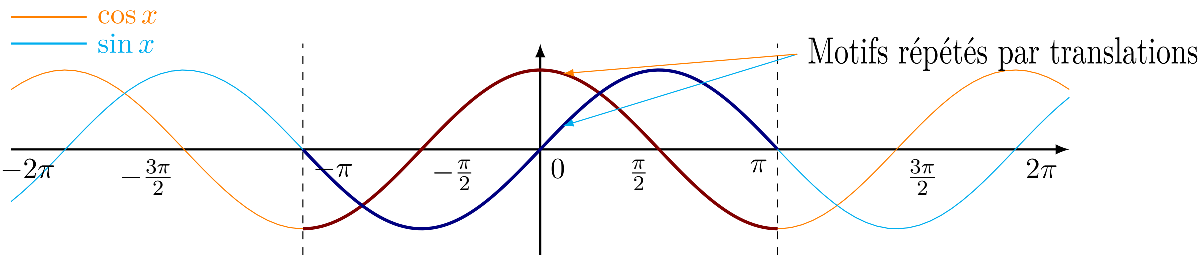
Remarque. On peut aussi dire que les fonctions sont périodiques de période 2π.

1.3 Courbes représentatives

- Le fait de dire que les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont 2π-périodiques signifie que si on prend n'importe quel intervalle d'amplitude 2π, le motif de la courbe représentative trouvé sur cet intervalle pourra se répéter.
  On peut alors tracer les courbes représentatives sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, et déduire la totalité des courbes par translations de vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2k\pi\\0\end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}*$.
- Le fait de dire que $x \mapsto \cos x$ est paire signifie que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (car $f(-x) = f(x)$).
  De plus, le fait de dire que $x \mapsto \sin x$ est impaire signifie que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère (car $f(-x) = -f(x)$).

  On peut alors tracer les courbes représentatives sur l'intervalle $[0\,;\pi]$, et déduire les courbes par symétries (axiale ou centrale).

Au final, les courbes représentatives sont les suivantes :

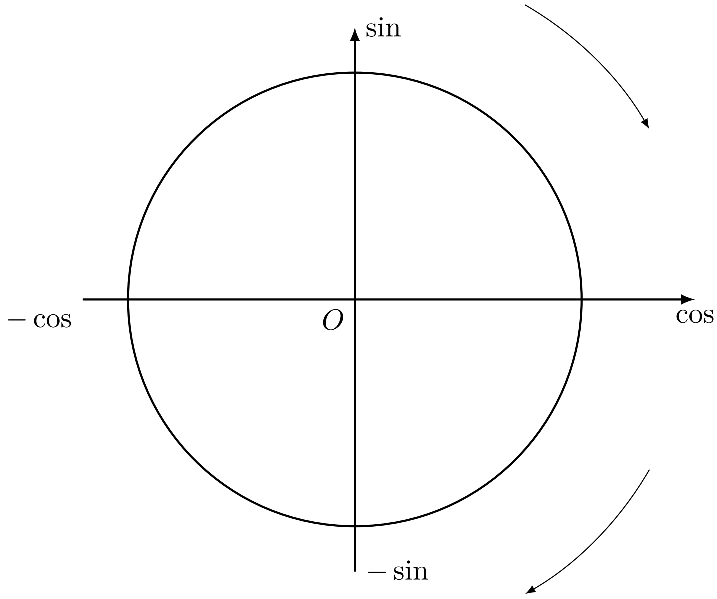


1.4 Dérivées

Propriété

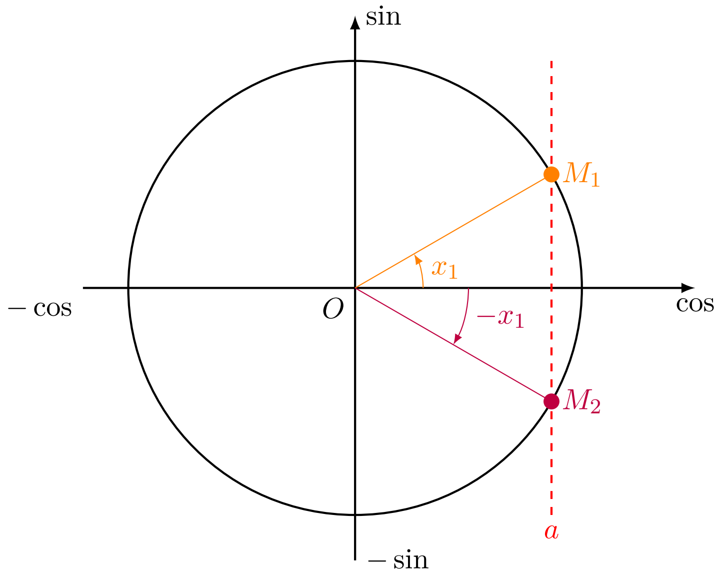
- La dérivée de la fonction $x \mapsto \cos x$ est la fonction $x \mapsto -\sin x$.
- La dérivée de la fonction $x \mapsto \sin x$ est la fonction $x \mapsto \cos x$.

Remarque. Un moyen mnémotechnique pour se souvenir de cette formule est de dire que dériver revient à tourner de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre :



2 Équations et inéquations

2.1 Équations du type $\cos(x) = a$



L'équation $\cos x = a$, où $-1 \leqslant a \leqslant 1$, admet au maximum deux solutions sur $]-\pi\,;\pi]$: x_1 et $-x_1$ (représentés ci-dessus sur le schéma).

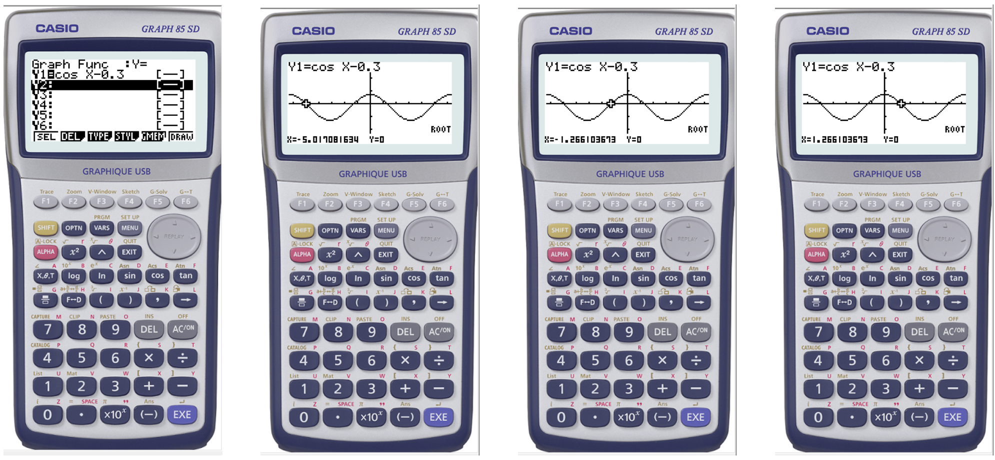
Dans le cas où a est une valeur remarquable (0, $\pm\dfrac{1}{2}$, $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou ± 1), l'équation peut être résolue facilement.

Exemple. $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{6}$.

Si a n'est pas une valeur remarquable, on ne peut résoudre l'équation qu'en donnant des valeurs approchées, sauf dans certains cas où l'énoncé nous guide pour trouver des valeurs exactes.

Exemple. On souhaite résoudre l'équation $\cos x = 0,3$ sur $]-\pi\,;\pi]$.
On peut utiliser :

— *la calculatrice* : on entre la fonction $f(x) = \cos x - 0,3$, on trace la courbe puis on demande les racines (« ROOT ») [on adapte en fonction du type de la calculatrice].



— *Python* :

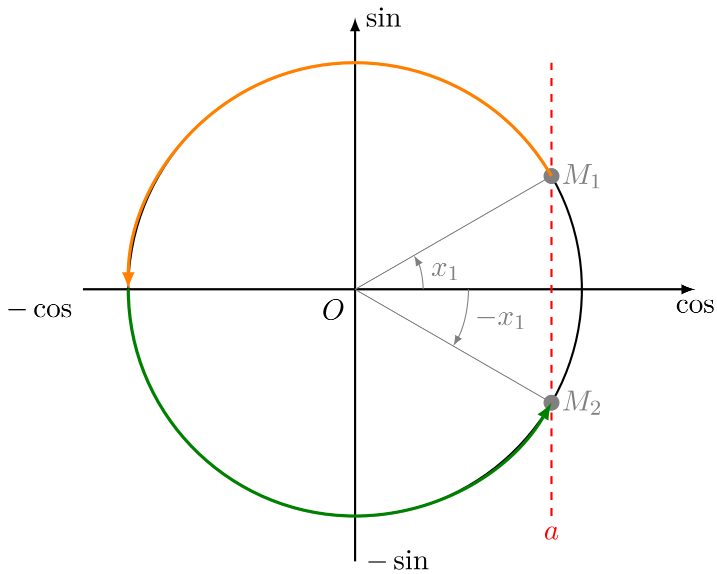
```python
from math import cos,pi
from scipy.optimize import bisect

f = lambda x : cos(x) - 0.3
a = bisect(f,-pi,0)

print(a)
```

On sait (par lecture graphique) qu'il y a 2 solutions opposées, donc trouver la solution négative (par exemple) suffit. On utilise alors la fonction `bisect(fonction, x0, x1` du module `scipy.optimize`, où `x0` et `x1` sont les bornes de l'intervalle dans lequel se trouve la solution de l'équation $f(x) = 0$.

2.2 Inéquations du type cos(x) ⩽ a



Si x_1 et $-x_1$ sont les solutions de l'équation $\cos x = a$ sur $]-\pi\,;\pi]$ alors l'inéquation $\cos x \leqslant a$ a pour ensemble solution :

$$]-\pi\,;-x_1] \cup [x_1\,;\pi]\,.$$

Exemple. $\cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left]-\pi\,;-\dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{6}\,;\pi\right]$.