1 Raisonnement par récurrence

Propriété. Principe de récurrence

Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété dépendant d'un entier naturel n. Si :

— pour un entier n_0, $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie (initialisation),

— pour tout entier naturel $k \geqslant n_0$, le fait que $\mathcal{P}_k$ soit vraie implique que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie (hérédité),

alors $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur à n_0.

Remarque. si $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$ alors on dira que la propriété est héréditaire.

Définition

Une *démonstration par récurrence* est une démonstration dans laquelle on utilise le principe de récurrence.

Une démonstration par récurrence comporte impérativement deux étapes : initialisation et hérédité.

Exemple. Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

— *Initialisation :* comme :

$$1^2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6},$$

la propriété est vraie au rang 1.

— *Hérédité :* soit k un entier non nul arbitrairement fixé; supposons la propriété vraie au rang k :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k-1)^2 + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

On veut montrer que la propriété est vraie au rang $k+1$, soit :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k+1}{6}[k(2k+1) + 6(k+1)] \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Ainsi, on a montré que si la propriété est vraie au rang k, alors elle est vraie au rang $k+1$.

La propriété considérée est donc vraie pour tout rang $n \geqslant 1$ en vertu du principe de récurrence.

2 Limite d'une suite

2.1 Définitions

Définition

On dit que la suite (u_n) *converge* vers un réel ℓ si u_n se rapproche de plus en plus de ℓ quand n tend vers $+\infty$.
On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Remarque. si (u_n) converge vers ℓ alors on dit que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.

Exemple. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0 car plus n prend de grandes valeurs positives, plus $\dfrac{1}{n}$ se rapproche de 0.

Définition

- On dit que la limite de (u_n) est $+\infty$ si u_n prend des valeurs de plus en plus grandes. On écrira alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que la limite de (u_n) est $-\infty$ si la suite $(-u_n)$ tend vers $+\infty$. On écrira alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple.

1. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$ tend vers $+\infty$ car plus n prend de grandes valeurs, plus n^2 aussi.
2. La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = -n^2$ tend vers $-\infty$ car $v_n = -u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Définition

On dit que la suite (u_n) *diverge* quand elle ne converge pas.

Exemple. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \cos(n)$ diverge car ses valeurs varient entre -1 et 1 sans jamais se rapprocher d'une valeur fixe.

2.2 Des limites de référence

Propriété

Soit p un entier strictement positif.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \qquad ; \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty.$$

2.3 Limite et comparaison

2.3.1 Théorèmes fondamentaux

Propriété. Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et soit n_0 un entier naturel.

- Si, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \geqslant u_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si, pour $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant u_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Exemple.

1. Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$. Alors, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant -n^2$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} = -\infty$.

Propriété

Toute suite géométrique de raison q telle que $|q| < 1$ converge vers 0.

2.4 Suite majorée ou minorée

Définition

- Une suite (u_n) est dite *majorée* s'il existe un réel M tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M.$$

- Une suite (u_n) est dite *minorée* s'il existe un réel m tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n.$$

- Une suite est dite *bornée* si elle est majorée et minorée.

Exemple. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

- Pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{1}{n} \leqslant 1$ donc $u_n \leqslant 1 + 1$, soit $u_n \leqslant 2$.

  La suite (u_n) est donc majorée par 2.
- De plus, $\dfrac{1}{n} > 0$ pour tout entier naturel n non nul donc $u_n > 1$.

  La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est minorée et majorée ; elle est donc bornée.

Propriété. Théorème de convergence

Toute suite croissante et majorée converge.
Toute suite décroissante et minorée converge.
Toute suite monotone et bornée converge.

2.5 Opérations et limites

(u_n) et (v_n) sont deux suites, ℓ et ℓ' représentent des réels.
Dans les tableaux suivants, « F.I. » signifie : « Forme Indéterminée ». Ce sont des cas où l'on ne peut pas conclure immédiatement quant à la valeur de la limite. Dans de tels cas, il est nécessaire de transformer l'écriture.

2.5.1 Somme et produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
$\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
	$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

2.5.2 Quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$
$\ell > 0$	0^+(0 en restant positif) 0^-(0 en restant négatif)	$+\infty$ $-\infty$
$\ell < 0$	0^+(0 en restant positif) 0^-(0 en restant négatif)	$-\infty$ $+\infty$
0	0	F.I.
ℓ	$+\infty$ $-\infty$	0 0
$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$+\infty$	$-\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.

Les quatre formes indéterminées à retenir sont :

« $\dfrac{\infty}{\infty}$ »	« $\infty - \infty$ »
« $0 \times \infty$ »	« $\dfrac{0}{0}$ »