Logarithme népérien

maths-mde.fr

1 Introduction

1.1 Définition et résolution d'équations

Définition

On définit la fonction *logarithme népérien* comme étant la fonction réciproque de la fonction exponentielle, c'est-à-dire l'unique fonction :

$$\begin{array}{rrcl} \ln : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

pour laquelle :

$$\forall x > 0,\ e^{\ln x} = ln\left(e^x\right) = x.$$

Propriété

Soient $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y.$$

On en déduit notamment que :

$$\ln 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \ln(e) = 1.$$

Exemple. $e^x = 7 \Leftrightarrow x = \ln 7$.

1.2 Variation de la fonction ln

Propriété

La fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{pour tout } x > 0.$$

De la dérivée du logarithme népérien, on peut en déduire la propriété suivante.

Propriété

La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est strictement croissante et concave $\mathbb{R}_+^*$.

1.3 Conservation de l'ordre

Propriété

Pour tous réels x et y strictement positifs,

$$\ln x = \ln y \Longleftrightarrow x = y \qquad \text{et} \qquad \ln x < \ln y \Longleftrightarrow x < y.$$

Exemple.

1. $$\begin{aligned} \ln\left(x^2+7\right) = \ln\left(2x^2+3\right) &\Leftrightarrow x^2+7 = 2x^2+3 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2. \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} \ln\left(x^2+10\right) > \ln\left(2x^2+1\right) &\Leftrightarrow x^2+10 > 2x^2+1 \\ &\Leftrightarrow x^2 < 9 \\ &\Leftrightarrow x \in [-3\ ;\ 3]. \end{aligned}$$

Remarque. dans la résolution d'équations ou d'inéquations avec des logarithmes, il faut toujours s'assurer que les opérandes soient strictement positives. Dans notre premier exemple, $x^2+7 > 0$ et $2x^2+3 > 0$ pour tout réel x ; on peut ainsi résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$. Il en est de même pour l'inéquation.

1.4 Relations fonctionnelles

Propriété

Pour tous réels x et y strictement positifs, pour tout entier relatif n :
- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$.
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.
- $\ln\left(x^n\right) = n \ln x$.

Faire preuve de rigueur lors de l'utilisation de la relation fonctionnelle : ne pas scinder $\ln(xy)$ en somme de deux logarithmes sans avoir vérifié et mentionné la stricte positivité de x et y.

2 Limites

2.1 Limites du logarithme népérien

Propriété

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

L'axe des ordonnées est donc asymptote à la courbe représentative de la fonction logarithme.

2.2 Croissances comparées

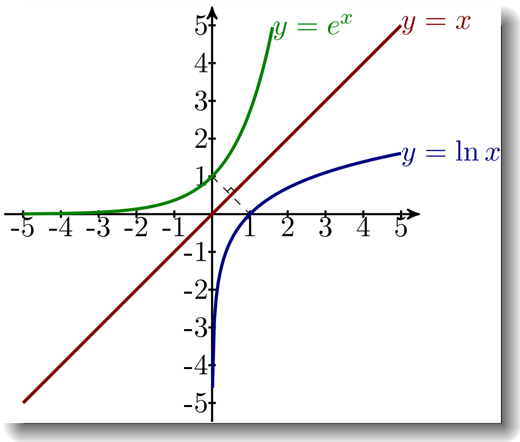
Propriété

Pour tout entier naturel n,
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0$.

Remarque. on dit qu'en cas d'indétermination, les puissances de x « l'emportent » sur $\ln x$.

3 Représentation graphique

De la stricte croissante de la fonction ln, de sa concavité, de ses limites et des valeurs remarquables du logarithme népérien, on déduit sa représentation graphique dans un repère orthonormé :



Du fait que les fonctions exp et ln sont réciproques, on déduit que, dans un repère orthonormé, leur courbe représentative sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

4 Dérivée de $\ln(u)$

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable à valeurs strictement positives sur un intervalle I. Alors, sur I :

$$\left(\ln(u)\right)' = \frac{u'}{u}.$$

Exemple. Soit $f(x) = \ln(e^x + 1)$.
Alors, $f(x) = \ln\left[u(x)\right]$ avec $u(x) = e^x + 1$ et $u'(x) = e^x$.
D'où :

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$