Vecteurs, droites et plans de l'espace

maths-mde.fr

1 Droite dans l'espace

1.1 Caractérisation

Propriété

Toute droite $\mathcal{D}$ de l'espace est définie par un point A et un vecteur $\vec{u}$.
On dit que $\vec{u}$ est un *vecteur directeur* de la droite.
$\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{AM} = k\vec{u}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

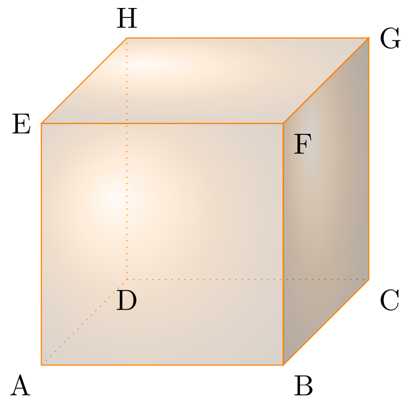
1.2 Droites parallèles

Définition

— Deux vecteurs de l'espace sont dits *colinéaires* s'ils ont la même direction.

— Deux droites de l'espace sont dites *parallèles* si leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires.

Dans l'espace, deux droites qui ne se coupent pas ne sont pas nécessairement parallèles.



Dans le cube ci-dessus par exemple, les droites (EF) et (BC) ne sont pas parallèles bien qu'elles ne se coupent pas.

Propriété

Dans l'espace, deux droites parallèles sont nécessairement dans un même plan ; on dit qu'elles sont *coplanaires*.

2 Plan dans l'espace

2.1 Combinaison linéaire de deux vecteurs

Définition

Combinaison linéaire de vecteurs Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On dit que $\vec{w}$ est une *combinaison linéaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existent deux réels λ et μ tels que :

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

2.2 Caractérisation d'un plan dans l'espace

Propriété

Tout plan de l'espace est défini par un point A et un couple de vecteurs non colinéaires $(\vec{u}, \vec{v})$.
On dit que le plan est dirigé par le couple $(\vec{u}, \vec{v})$.

Remarque. Pour tout point M du plan défini par un point A et un couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$, $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition. S

oit un plan défini par un point A et un couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.

— $(\vec{u}, \vec{v})$ est appelé une *base* du plan.

— $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est appelé un *repère* du plan.

2.3 Plans parallèles

Propriété

Soient deux plans de l'espace $\mathcal{P}_1$, dirigé par $(\vec{u_1}, \vec{v_1})$, et $\mathcal{P}_2$, dirigé par $(\vec{u_2}, \vec{v_2})$.
$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ d'une part, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ d'autre part, sont colinéaires.

3 Vecteurs coplanaires et repère de l'espace

3.1 Vecteurs coplanaires

Définition

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace non deux à deux colinéaires sont dits *coplanaires* si l'un est une combinaison linéaire des deux autres.

Remarque. Si deux des trois vecteurs sont colinéaires alors les trois vecteurs sont nécessairement coplanaires.

3.2 Repère de l'espace

Propriété

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace, pour tout vecteur $\vec{t}$ de l'espace il existe un triplet unique de réels $(a\ ; b\ ; c)$ tel que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Définition

Un repère de l'espace est défini par un point A et un triplet de 3 vecteurs non coplanaires $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Propriété

Dans le repère $(A\ ; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, pour tout point M de l'espace il existe un triplet unique de réels $(x\ ; y\ ; z)$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

Définition. Coordonnées d'un point et d'un vecteur de l'espace

Dans le repère $(A\ ; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, si un point M est tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$ alors $(x; y; z)$ constitue les coordonnées du point M, mais aussi du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans ce repère.

Les calculs sur les coordonnées dans l'espace se font comme les calculs sur les coordonnées dans le plan.

4 Représentations paramétriques

L'espace est muni d'un repère $(O\ ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A de coordonnées $(x_A\ ; y_A\ ; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(a\ ; b\ ; c)$.

Propriété

$$M(x;y;z)\in\mathcal{D}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

C'est une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Cette représentation paramétrique n'est pas unique et dépend du vecteur directeur et du point choisi sur la droite !

Exemple. La droite caractérisée par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases}x=-1+3t\\y=2-t\\z=5+7t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

passe par le point $A(-1;2;5)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix}$.

Remarque. Point d'intersection de deux droites : Deux droites (d) et (d') ont pour représentations paramétriques respectives :

$$(d):\begin{cases}x=-1+t\\y=6+2t\\z=-2-4t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}\qquad;\qquad(d'):\begin{cases}x=4-3t'\\y=16-5t'\\z=-22+t'\end{cases},\ t'\in\mathbb{R}$$

Sont-elles sécantes ?

Notons I l'éventuel point d'intersection de ces droites. Alors,

$$\exists t\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x_I=-1+t\\y_I=6+2t\\z_I=-2-4t\end{cases}\qquad\text{et}\qquad\exists t'\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x_I=4-3t'\\y_I=16-5t'\\z_I=-22+t'\end{cases}.$$

Il faut donc voir si le système :

$$\begin{cases}-1+t=4-3t'\\6+2t=16-5t'\\-2-4t=-22+t'\end{cases}$$

admet une solution.
Pour le savoir, il faut prendre uniquement deux équations sur les trois :

$$\begin{cases}-1+t=4-3t'\\6+2t=16-5t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t+3t'=5\\2t+5t'=10\end{cases}$$

et résoudre le système ; on trouve ici : $t=5$ et $t'=0$.
On doit ensuite vérifier que la troisième équation est vérifiée pour ces valeurs :

$$-2-4t=-22+t'\Leftrightarrow-2-4\times5=-22+0\Leftrightarrow-22=-22.$$

C'est donc ici le cas. Par conséquent, les deux droites sont sécantes et leur point d'intersection est obtenu par exemple en prenant $t'=0$ dans la représentation paramétrique de (d') : il s'agit du point de coordonnées $(4;16;-22)$.

4.1 Représentations paramétriques d'un plan

Propriété

L'espace est muni d'un repère $(O\ ;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère le plan $\mathcal{P}$ de repère $(A\ ;\vec{u},\vec{v})$. Le point A a pour coordonnées $(x_A\ ;y_A\ ;z_A)$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(a\ ;b\ ;c)$ et $(a'\ ;b'\ ;c')$.

Alors le système :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda a + \mu a' \\ y = y_A + \lambda b + \mu b' \\ z = z_A + \lambda c + \mu c' \end{cases} \quad , \quad (\lambda ; \mu) \in \mathbb{R}^2$$

est appelé une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

Exemple. Le plan caractérisé par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -3 + 7\lambda - 2\mu \\ y = 1 - \lambda + 2\mu \\ z = 7 + 5\lambda - \mu \end{cases} \quad , \quad (\lambda ; \mu) \in \mathbb{R}^2$$

passe par le point de coordonnées $(-3; 1; 7)$ et a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4.2 Produit scalaire

Le produit scalaire a été défini en classe de 1^{re} dans le plan.
Sa définition reste inchangée dans l'espace.

Définition

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de l'espace.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, est défini par :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle aigu ;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle obtus.

Les propriétés sur le produit scalaire dans l'espace sont les mêmes que celles dans le plan.

Propriété

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace :

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$;
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ (propriété de symétrie) ;
- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$;
- $\forall (\lambda ; \mu) \in \mathbb{R}^2,\ (\lambda \overrightarrow{u}) \cdot (\mu \overrightarrow{v}) = \lambda\mu(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$;
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2)$;
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2)$;
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{4}(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2)$.

Celle faisant intervenir les coordonnées change afin d'intégrer la troisième composante :

Propriété

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$, c'est-à-dire où $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{j} = 0$, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Alors,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Exemple. Produit scalaire

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\5\\-7\end{pmatrix}$. Alors,

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -1\times 3 + 2\times 5 + 1\times(-7) = -3+10-7 = 0.$$

4.3 Orthogonalité de deux vecteurs

Définition

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace.
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$.

Dans l'exemple **??** précédent, les vecteurs sont orthogonaux.

4.4 Orthogonalité d'un vecteur et d'un plan

Définition. Vecteur normal

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur de l'espace.
On dit que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ si, pour tout vecteur $\overrightarrow{p}$ de $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{p} = 0$.

4.5 Orthogonalité de deux plans

Définition. S

oient deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de l'espace.
On dit que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont orthogonaux si tout vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de $\mathcal{P}_1$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{u_2}$ de $\mathcal{P}_2$.

Propriété

Soient deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de l'espace, de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.

$$\mathcal{P}_1 \text{ et } \mathcal{P}_2 \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = 0.$$

Remarque. Cette dernière propriété sera très utilisée pour démontrer l'orthogonalité de deux plans.

4.6 Équations cartésiennes d'un plan

Propriété

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$.

Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Alors, pour tout point $M(x;y;z)$ l'espace,

$$M\in\mathcal{P} \Leftrightarrow ax+by+cz+d=0, \qquad \text{où } d\in\mathbb{R}.$$

Définition. «

$ax+by+cz+d=0$ » est appelée une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

Remarque. Pour un triplet donné $(a;b;c)$, il existe une infinité d'équations cartésiennes car $d\in\mathbb{R}$.

4.7 Détermination d'une représentation paramétrique de l'intersection de 2 plans

On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations cartésiennes respectives :

$$\mathcal{P} : 2x+3y-z+5=0$$
$$\mathcal{P}' : x+y+1=0$$

Nous souhaitons déterminer une représentation paramétrique de l'intersection de ces deux plans si elle existe.

Pour cela, on « résout » le système suivant, en conservant une inconnue et en la considérant comme un paramètre (ici, z) :

$$\begin{cases} 2x+3y-z & = -5 \\ x+y & = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y & = z-5 \quad L_1 \\ 2x+2y & = -2 \quad L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y & = z-3 \quad L_1-L_2 \\ x & = -1-(z-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y & = z-3 \\ x & = -z+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-t \\ y = -3+t \\ z = t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

L'intersection des deux plans existe et est la droite passant par le point $A(2;-3;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

4.8 Intersection d'une droite et d'un plan

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $5x+y-z+3=0$ et la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(0;1;3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$.

1. **On vérifie d'abord que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en un point.**
   Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$; donc, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n} = 5\times 1 + 1\times 0 + (-1)\times 3 = 2 \neq 0$ donc $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$: il y a donc un point unique d'intersection.
   Appelons-le I.

2. **Déterminons les coordonnées de I.**
   La représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est :
   $$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 3+3t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}.$$
   Étant donné que I appartient à $\mathcal{D}$, il existe un réel k tel que $I(k;1;3k+3)$.
   En substituant les valeurs de x, y et z en fonction de k dans l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$, on a :
   $$\begin{aligned} & 5k+1-(3+3k)+3=0 \\ \Leftrightarrow\ & 2k+1=0 \\ \Leftrightarrow\ & k=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$
   Finalement, on a : $I\left(-\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right)$.

5 Distances

5.1 Distance entre deux points

Propriété

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$. Soient deux points $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$. La distance entre A et B est donnée par l'égalité :

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

5.2 Distance d'un point à un plan

Définition

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace, et soit A un point quelconque de l'espace.
Soit (d) la droite passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}$; elle coupe $\mathcal{P}$ en un point H.
H est appelé le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

Propriété

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace, et soit A un point quelconque de l'espace. On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.
Alors, H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A.

Démonstration

Soit H le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.
Supposons qu'il existe un point K du plan $\mathcal{P}$ plus proche de A que l'est le point H.
$KA \leqslant HA$ car K est le point de la droite le plus proche de A. Donc $KA^2 \leqslant HA^2$.
Or, (AH) est orthogonale à $\mathcal{P}$, donc (AH) est orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}$. En particulier, (AH) est perpendiculaire à (HK).
Le triangle AHK est donc rectangle en H.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$HA^2 + HK^2 = AK^2.$$

Donc :

$$HA^2 + HK^2 \leqslant HA^2.$$

Donc $HK \leqslant 0$, ce qui est impossible sauf dans le cas où le point K est le point H.
On en déduit que H est le point du plan le plus proche du point A.

Propriété

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$.
Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, et soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point quelconque de l'espace. La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est :

$$d\,(\mathrm{A}\,;\,\mathcal{P}) = \frac{|ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + cz_\mathrm{A} + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Démonstration

Notons H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$. Alors, (AH) est orthogonale à $\mathcal{P}$, donc admet pour vecteur directeur un vecteur normal à ce plan, soit $\vec{u}\,(a; b; c)$ et donc (AH) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_\mathrm{A} + at \\ y = y_\mathrm{A} + bt \\ z = z_\mathrm{A} + ct \end{cases} \quad , \qquad t \in \mathbb{R}.$$

H étant le point d'intersection de cette droite et de $\mathcal{P}$, on a :

$$a\,(x_\mathrm{A} + at) + b\,(y_\mathrm{A} + bt) + c\,(z_\mathrm{A} + ct) + d = 0\ ,\ \text{soit : } t = -\frac{ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + cz_\mathrm{A} + d}{a^2+b^2+c^2}.$$

On a alors :

$$\mathrm{AH}^2 = (x_\mathrm{M} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{M} - y_\mathrm{A})^2 + (z_\mathrm{M} - z_\mathrm{A})^2$$

$$\mathrm{AH}^2 = \left(-a\frac{ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + cz_\mathrm{A} + d}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 + \left(-b\frac{ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + cz_\mathrm{A} + d}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 + \left(-c\frac{ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + cz_\mathrm{A} + d}{a^2+b^2+c^2}\right)^2$$

$$\mathrm{AH}^2 = \left(a^2+b^2+c^2\right)\frac{(ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + cz_\mathrm{A} + d)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

$$\mathrm{AH}^2 = \frac{(ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + cz_\mathrm{A} + d)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\mathrm{AH} = \frac{|ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + cz_\mathrm{A} + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$