Continuité, dérivabilité et convexité d'une fonction

1 Limites

1.1 Limite aux infinis

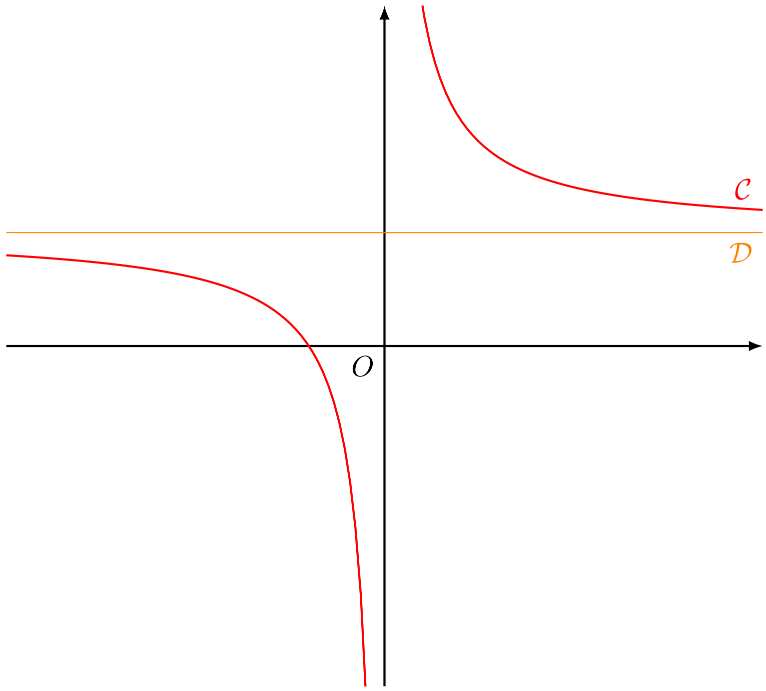
Définition

La limite d'une fonction f en $-\infty$ (resp. $+\infty$) est la valeur (si elle existe) vers laquelle se rapproche $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$). On la note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$).
Cette limite, quand elle existe, peut être un nombre réel ou un infini.

Exemple.

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ car plus x se rapproche de $-\infty$, plus $\frac{1}{x}$ se rapproche de 0.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ car plus x devient grand, plus son carré aussi.

Remarque. Soit a un réel. Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$ (resp. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$) alors la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f se rapproche de la droite d'équation $y = a$ en $-\infty$ (resp. $+\infty$).
Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = a$ est une *asymptote horizontale* de $\mathcal{C}$.



Ici, $\mathcal{D}$ est une asymptote horizontale de $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Propriété

La limite aux infinis d'une fraction rationnelle est égale à la limite du rapport des termes de plus haut degré.

Exemple.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 5x + 2}{8x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{8x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{-x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^2}{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-5x) = -\infty$.

Propriété. Exponentielle

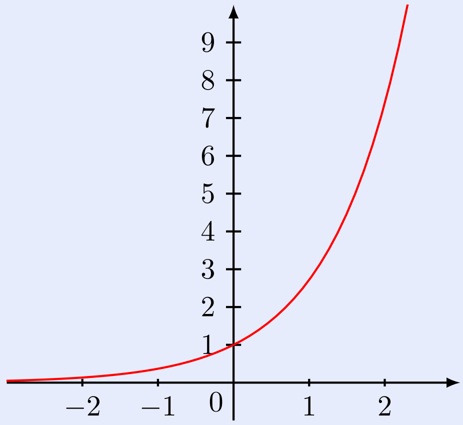
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Croissances comparées :

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

(L'exponentielle l'emporte sur tout polynôme)



1.2 Limite en un point fini

Définition

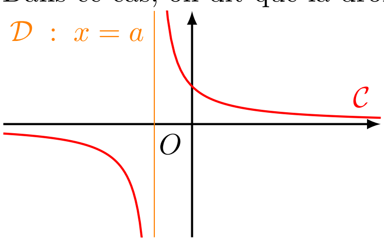
Soit a un réel fini. La limite d'une fonction f en a est la valeur vers laquelle $f(x)$ se rapproche quand x se rapproche de a. On la note $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Remarque. Il se peut que, lorsque x se rapproche de a tout en lui étant inférieur, la limite soit différente du cas où x se rapproche de a en lui étant supérieur. On écrit alors :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x).$$

Exemple. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$.

Remarque. Soit a un réel. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) alors la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f se rapproche de la droite d'équation $x = a$.
Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une *asymptote verticale* de $\mathcal{C}$.



Ici, $\mathcal{D}$ est une asymptote verticale de $\mathcal{C}$ en a.

Propriété

— $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty.$

— $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{x^n}\right) = +\infty,\ n \in \mathbb{N}.$

— $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\frac{1}{x^{2n}}\right) = +\infty,\ n \in \mathbb{N}.$

— $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right) = -\infty,\ n \in \mathbb{N}.$

1.3 Opérations et comparaison sur les limites

Dans un cas général, les opérations sur les limites de fonctions sont identiques à celles concernant les suites. Le *théorème des gendarmes* et le *théorème de comparaison* sont aussi valables pour les fonctions.

Propriété. Composition

Soient u et v deux fonctions. On définit la fonction f par $f(x) = u[v(x)]$. Alors,

$$a \lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{X\to y} u(X) \quad , \quad \text{où } y = \lim_{x\to\alpha} v(x),$$

α pouvant représenter un nombre fini ou un infini.

Remarque. On peut aussi noter :

$$f(x) = u[v(x)] = (u\circ v)(x)$$

(lire « u rond v »). On dit que f est une *fonction composée*.

Exemple. Soit $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x^2+1) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{X\longrightarrow+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

2 Continuité

Définition

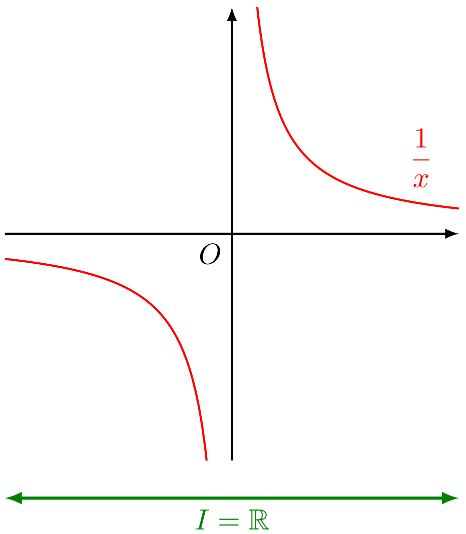
Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$.
On dit que f est *continue* en a si :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

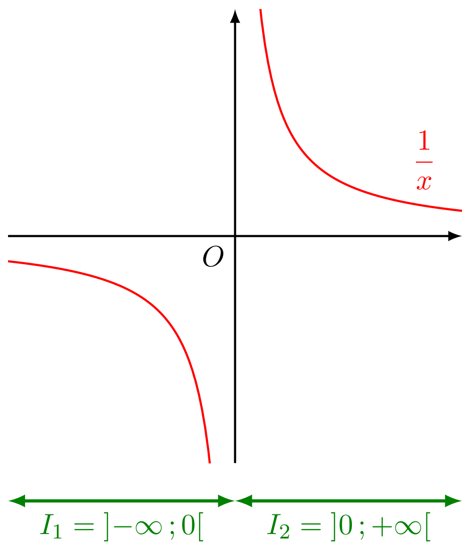
On dit que f est *continue* sur I si f est continue en tout point de I.

Cela se traduit graphiquement par le fait que la courbe représentative d'une fonction continue sur I peut se tracer sans lever le crayon sur cet intervalle.

Exemple. Et, contre-exemple La courbe représentative de la fonction inverse n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (car ses limites en 0 sont infinies). En revanche, elle l'est sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.



Il y a un « trou » au niveau de $x = 0$ donc la fonction n'est pas continue en 0, donc pas continue sur $\mathbb{R}$.



Il n'y a pas de trou sur chaque intervalle I_1 et I_2 donc la fonction est continue sur I_1 et sur I_2.

Remarque.
- Dans le second cas, on ne dit pas que la fonction est continue sur $I_1 \cup I_2$, mais *continue sur chacun des intervalles*.
- Quand une fonction n'est pas continue, on ne dit pas qu'elle est *discontinue*.

Définition

On appelle *point de discontinuité* tout point en lequel une fonction n'est pas continue.

Exemple. $x = 0$ est un point de discontinuité de la fonction inverse.

2.1 Fonctions continues de référence

Propriété

1. Les fonctions *polynômes* sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions *rationnelles* sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
3. La fonction *racine carrée* est continue sur $[0\,;+\infty[$.
4. Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
5. Les fonctions obtenues par somme, produit ou quotient de fonctions continues sont continues sur chacun des intervalles où elles sont définies.

Exemple.
1. La fonction $x \mapsto x^3 + 2x - 5$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.
2. La fonction $x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $x \mapsto (x^2 + 1)\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-1}$ est continue sur $]-\infty\ ;\ 1[$ et sur $]1\ ;\ +\infty[$ comme fonction rationnelle définie sur ces deux intervalles.

2.2 Continuité d'une fonction composée

Propriété

Soit $f = v \circ u$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si u est continue sur I et si v est continue sur $u(I)$ alors f est continue sur I.

Exemple. Soient $u\ :\ x \mapsto x - 1$ et $v\ :\ \sqrt{x}$.
Notons $f(x) = (v \circ u)(x) = \sqrt{x-1}$.
u est continue sur $\mathbb{R}$ mais f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ car $x - 1 < 0$ pour $x < 1$. Ainsi, f est définie sur $I = [1\ ;\ +\infty[$, et elle est continue sur I car u est continue sur I et v est continue sur $u(I) = [0\ ;\ +\infty[$.

2.3 Continuité et tableau de variations

Dans un tableau de variations, un point de discontinuité est représenté par une double barre verticale. Par exemple, pour la fonction inverse, on a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

2.4 Fonction définie et fonction continue

Une fonction peut être définie sur un intervalle I sans nécessairement être continue sur I.

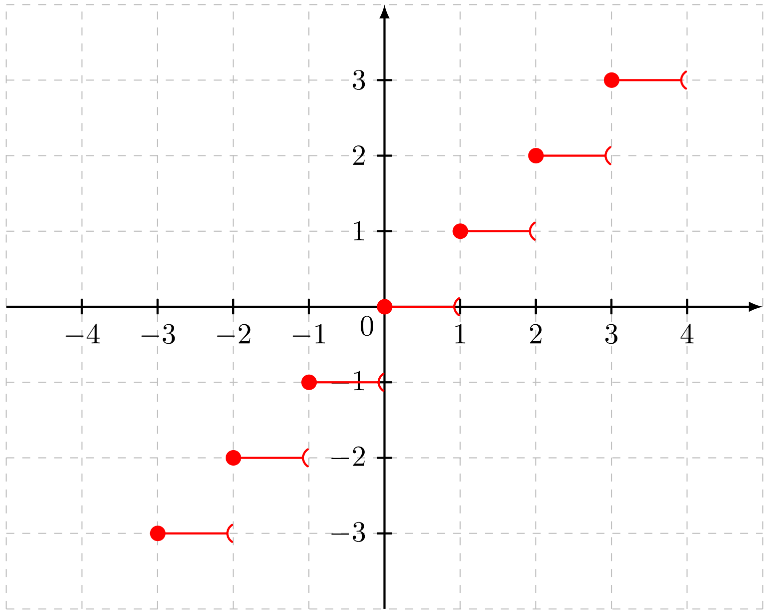
Exemple. on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = E(x) = \lfloor x \rfloor.$$

Cette fonction est appelée *fonction partie entière* : pour tout entier relatif n,

$$\forall x \in [n\ ;\ n+1[, \quad f(x) = n.$$

Sa représentation graphique est la suivante :



Cette fonction est définie en tout point de $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

2.5 Théorème des valeurs intermédiaires

Propriété

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et soient a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b.

Ce théorème assure, sous certaines hypothèses, l'existence d'*au moins un* antécédent à k, mais il n'assure pas son unicité et ne permet pas de calculer sa valeur.

Propriété. Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soient a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Si f est continue et strictement monotone sur $[a\ ;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans l'intervalle $[a\ ;b]$.

Exemple. Soit $f(x) = \cos x - x$. Alors, $f'(x) = -\sin x - 1 < 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement décroissante. f est aussi continue sur $\mathbb{R}$ comme la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
De plus,

— $f(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0$

— $f(\pi) = \cos \pi - \pi = -\pi < 0$

donc $0 \in]f(\pi)\ ;\ f(0)[$. Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\ ;\ \pi]$.

3 Dérivation

3.1 Dérivabilité en un point a

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.
On dit que f est *dérivable* en a si :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est une limite réelle finie ℓ.

ℓ est alors appelé le nombre dérivé de f en a, et on le note $f'(a)$.

Par extension, on dit que f est *dérivable sur I* si f est dérivable en tout point a de I. La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est alors appelée *fonction dérivée de f*.

3.2 Dérivabilité et continuité

Propriété

Si f est une fonction définie et dérivable en a alors elle est continue en a.

La réciproque de ce théorème est fausse : une fonction peut être continue sans être dérivable. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais pas dérivable en 0 car :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = +1.$$

3.3 Règles de dérivation

Propriété

Théorème de dérivation des fonctions composées : Soit $f(x) = (v \circ u)(x)$. Sa dérivée, quand elle existe, est :

$$f'(x) = u'(x) \times v'[u(x)].$$

On en déduit alors les propriétés suivantes :

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée	Condition
e^u	$u'e^u$	
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$ sur I
u^n	$nu'u^{n-1}$	
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$	$u(x) > 0$ sur I
$\sin(u)$	$u' \times \cos(u)$	
$\cos(u)$	$-u' \times \sin(u)$	

Exemple. Soit $f(x) = e^{x^2}$.
On peut écrire $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$.
Ainsi, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = 2xe^{x^2}$.

4 Convexité d'une fonction

4.1 Dérivée seconde

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa dérivée f' soit elle aussi dérivable sur I.
On appelle *dérivée seconde de f* la dérivée de la dérivée de f, et on la note f''.

Exemple. Soit $f(x) = x^3$. Alors, $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = (3x^2)' = 6x$.

4.2 Fonction concave, fonction convexe

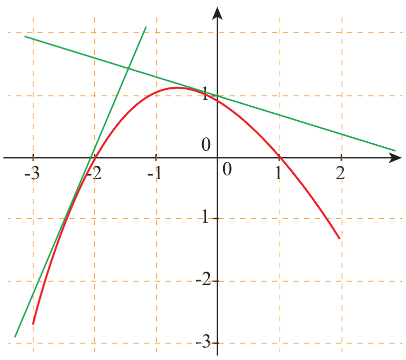
Définition

On dit que f est *concave* sur un intervalle I si $f''(x) < 0$ sur I.
On dit que f est *convexe* sur un intervalle I si $f''(x) > 0$ sur I.

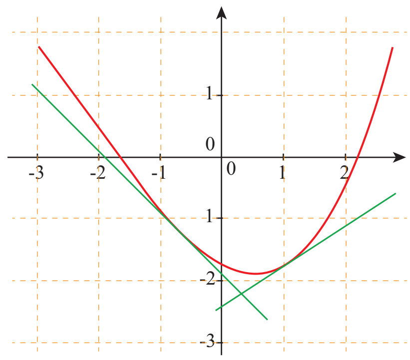
Interprétation graphique :

— la courbe représentative d'une fonction *convexe* sur un intervalle I sera toujours *au-dessus* de ses tangentes ;

— la courbe représentative d'une fonction *concave* sur un intervalle I sera toujours *en dessous* de ses tangentes.



Fonction concave sur $[-3\ ;\ 2]$



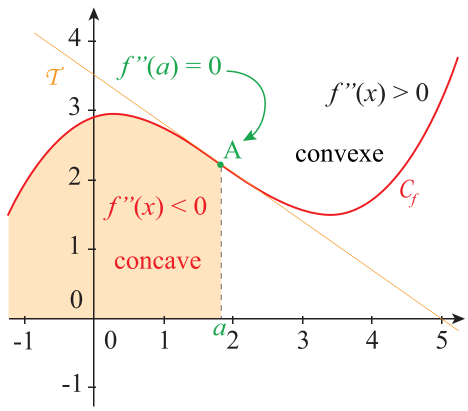
Fonction convexe sur $[-3\ ;\ 2]$

4.3 Point d'inflexion

Définition

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, et soit $a \in I$.
On dit que le point de coordonnées $(a\ ;\ f(a))$ est un *point d'inflexion* de la courbe représentative de f si $f''(x)$ s'annule en a en changeant de signe.

Graphiquement, cela se traduit par un changement de convexité en a.



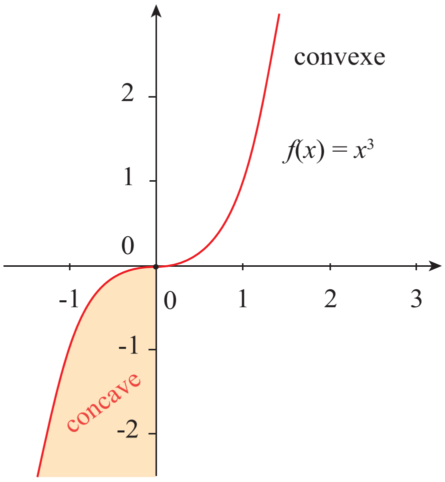
Exemple. Soit $f(x) = x^3$. Alors, $f''(x) = 6x$ et :

— $f''(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$;

— $f''(x) > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$;

— $f''(x) = 0$.

Donc le point de coordonnées $(0\ ;\ f(0))$, c'est-à-dire l'origine du repère, est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.



convexe
$f(x) = x^3$
concave
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2
3