Exercice n°1

On considère la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2.$$

Posons $P(n)$ la propriété :

$$(P_n) : 1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1. **Initialisation.**
   $S_1 = 1^2 = 1$ et $\dfrac{1\times(1+1)(2\times1+1)}{6} = \dfrac{6}{6} = 1.$
   Donc $P(1)$ est vraie.

2. **Hérédité.**
   Supposons que pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie (hypothèse de récurrence). Montrons alors que $P(k+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire que :

   $$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

   Par hypothèse de récurrence, on a :

   $$\begin{aligned} S_k + (k+1)^2 &= 1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right] \\ &= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6}\right] \\ &= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}. \end{aligned}$$

   « $k_1 = -2$ » est une racine évidente du polynôme $2k^2+7k+6$ donc la seconde racine k_2 est telle que $k_1k_2 = \dfrac{c}{a}$, donc $k_2 = -\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6}{2} = -\dfrac{3}{2}$.
   Donc,
   $2k^2+7k+6 = 2\,(k+2)\left(k+\frac{3}{2}\right) = (k+2)(2k+3)$.
   Finalement, on a :

   $$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

   L'hérédité est donc vérifiée.

3. **Conclusion.**
   Quel que soit l'entier naturel $k \geqslant 1$,
   $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
   Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice n°2

Démontrons par récurrence l'*inégalité de Bernoulli* :

$$\forall x \geqslant -1,\ x \neq 0, \forall n > 1,\ (1+x)^n > 1+nx.$$

— **Initialisation.**
Pour $n=2$, $(1+x)^n = (1+x)^2 = 1+2x+x^2$

$1+nx = 1+2x$

Or, $x^2>0$ donc $1+2x+x^2 > 1+2x$.
Ainsi, $(1+x)^2 > 1+2x$.
L'inégalité est donc vraie au rang $n=2$.

— **Hérédité.**
On suppose que l'inégalité est vraie au rang n, c'est-à-dire que l'on suppose que pour un entier n quelconque supérieur strictement à 1 :

$$\forall x \geqslant -1,\ x\neq 0,\ (1+x)^n > 1+nx \qquad \text{(HR)}$$

et on souhaite démontrer que :

$$\forall x \geqslant -1,\ x\neq 0,\ (1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x.$$

$\forall x \geqslant -1$, $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \times (1+x) \\ &> (1+nx)\times(1+x) && \text{par HR} \\ &> 1+nx+x+x^2 && \text{en développant} \\ &> 1+(n+1)x+x^2. \end{aligned}$$

Or, $x^2>0$ donc $1+(n+1)x+x^2 > 1+(n+1)x$, d'où :

$$(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x.$$

Ainsi, si l'inégalité est vraie à un rang n quelconque, elle l'est aussi au rang $n+1$: l'hérédité est démontrée.
Par conséquent, l'inégalité de Bernoulli est vraie pour tout entier naturel n supérieur strictement à 1.

Exercice n°3

Notons :

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad \exists p \in \mathbb{Z} | 5^n - 1 = 4p.$$

Démontrons que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n.

— *Initialisation.*
Pour $n=0$: $5^n-1 = 5^0-1 = 1-1 = 0$. Or, $0 = 4\times 0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— *Hérédité.*
Supposons qu'il existe un entier k pour lequel $\mathcal{P}_k$ est vraie, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel p tel que $5^k-1=4p$. C'est l'hypothèse de récurrence (HR).
Alors, $5^k = 4p+1$, et donc $5\times5^k = 5(4p+1)$, soit : $5^{k+1} = 20p+5$.
Ainsi, $5^{k+1}-1 = 20p+4 = 4(5p+1)$.
Il existe donc bien un entier $P = 5p+1$ tel que $5^{k+1} = 4P$.
La propriété est donc héréditaire car $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$.

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout entier naturel n.
Ainsi, 5^n-1 est divisible par 4, quelle que soit la valeur de l'entier naturel n.

Exercice n°4

Notons :

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad \exists q \in \mathbb{Z} | 4^n + 15n - 1 = 9q.$$

Démontrons que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n.

— *Initialisation.*
Pour $n = 0$: $4^n + 15n - 1 = 4^0 + 15 \times 0 - 1 = 0$.
Or, $0 = 9 \times 0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— *Hérédité.*
Supposons qu'il existe un entier k pour lequel $\mathcal{P}_k$ est vraie, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel q tel que $4^k + 15k - 1 = 9q.$, c'est-à-dire $4^k = 9q - 15k + 1$ C'est l'hypothèse de récurrence (HR).
On souhaite démontrer alors qu'il existe un entier q' tel que $4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 9q'$, soit $4^{k+1} + 15k = 9q' - 14$.

$$\begin{aligned}
&4^{k+1} + 15(k+1) - 1 \\
&= 4 \times 4^k + 15k + 14 \\
&= 4 \times (9q - 15k + 1) + 15k + 14 \quad \text{d'après (HR)} \\
&= 36q - 60k + 4 + 15k + 14 \\
&= 36q - 45k + 18 \\
&= 9(4q - 5k + 2) \\
&= 9q', \qquad \text{avec } q' = 4q - 5k + 2 \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Il existe donc bien un entier $q' = 4q - 5k + 2$ tel que $4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 9q'$.
La propriété est donc héréditaire car $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$.

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout entier naturel n.
Ainsi, $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9, quelle que soit la valeur de l'entier naturel n.

Exercice n°5

Notons, $\mathcal{P}_n \quad : \quad \exists p \in \mathbb{Z} | 7 \times 3^{5n} + 4 = 11p$.
Démontrons que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n.

— *Initialisation.*
Pour $n = 0$: $7 \times 3^{5n} + 4 = 7 + 4 = 11 = 11 \times 1$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— *Hérédité.*
Supposons qu'il existe un entier k pour lequel $\mathcal{P}_k$ est vraie, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel p tel que $7 \times 3^{5k} + 4 = 11p$, soit $7 \times 3^{5k} = 11p - 4$. C'est l'hypothèse de récurrence (HR).
Alors,

$$\begin{aligned}
7 \times 3^{5(k+1)} + 4 &= 7 \times 3^{5n} \times 3^5 + 4 \\
&= 7 \times 3^5 \times 243 + 4 \\
&= (11p - 4) \times 243 + 4 \quad \text{(HR)} \\
&= 11 \times 243p - 4 \times 243 + 4 \\
&= 11 \times 243p + 4 \times 242 \\
&= 11 \times 243p + 4 \times 22 \times 11 \\
&= 11(243p + 88).
\end{aligned}$$

Il existe donc bien un entier $p' = 243p + 88$ tel que $7 \times 3^{5(k+1)} + 4 = 11p'$.
La propriété est donc héréditaire car $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$.

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout entier naturel n.
Ainsi, $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11, quelle que soit la valeur de l'entier naturel n.

Exercice n°6

1. $$\begin{aligned}
n^3 + n^2 + n + 1 &= \frac{n^4 - 1}{n - 1} \\
&= \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 1)}{n - 1} \\
&= \frac{(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)}{n - 1} \\
&= (n + 1)(n^2 + 1).
\end{aligned}$$

   Donc $n^3 + n^2 + n + 1$ est bien divisible par $n + 1$.

2. $1\,111 = 10^3 + 10^2 + 10 + 1$ est divisible par $10 + 1 = 11$.
   De plus, d'après la question précédente, $10^2 + 1 = 101$ est aussi un diviseur de $1\,111$.
   Deux diviseurs non triviaux de $1\,111$ sont donc 11 et 101.

Exercice n°7

Posons, $\mathcal{P}_n$: $\quad \forall n \geqslant 4, n \in \mathbb{N}, n! > n$.
Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie.

— *Initialisation.*
$4! = 2 \times 3 \times 4 = 24$ et $4^2 = 16$ donc pour $n = 4$, $n! > n^2$.

— *Hérédité.*
Supposons que pour un certain entier k fixé supérieur ou égal à 4, $\mathcal{P}_k$ est vraie, c'est-à-dire que $k! > k^2$ (HR).
Démontrons alors que $(k+1)! > (k+1)^2$, soit $(k+1)! > k^2 + 2k + 1$.

$$\begin{aligned}
(k+1)! &= k! \times (k+1) \\
&> k^2 \times (k+1) \qquad \text{d'après (HR)}
\end{aligned}$$

Il faudrait démontrer maintenant que,
$k^2(k+1) \geqslant (k+1)^2$.
On calcule alors :

$$\begin{aligned}
k^2(k+1) - (k+1)^2 &= (k+1)\left[k^2 - (k+1)\right] \\
&= (k+1)(k^2 - k - 1) \\
&= (k+1)\left[k(k-1) - 1\right].
\end{aligned}$$

$\forall k \geqslant 4$,

$$\left.\begin{array}{r} k(k-1) - 1 \geqslant 4 \times 3 - 1, \text{ soit } k(k-1) - 1 \geqslant 11 \\ k + 1 \geqslant 5 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (k+1)\left[k(k-1) - 1\right] \geqslant 55 > 0.$$

Donc $k^2(k+1) - (k+1)^2 \geqslant 0$, soit $k^2(k+1) \geqslant (k+1)^2$.
Ainsi, $(k+1)! > (k+1)^2$. La propriété $\mathcal{P}_n$ est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4.

Exercice n°8

Démontrons par récurrence l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a;b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

— **Initialisation.**
Pour $n=0$, $(a+b)^n = (a+b)^0 = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$$

Ainsi, la formule est vraie pour $n=0$ et l'initialisation est alors vérifiée.

— **Hérédité.**
On suppose que pour un n arbitraire, l'égalité est vraie donc :

$$\forall (a;b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \text{(HR)}$$

et montrons qu'elle l'est aussi au rang $n+1$, donc montrons que :

$$\forall (a;b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\quad (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Dans un premier temps, remarquons que :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = a(a+b)^n + b(a+b)^n.$$

De plus,

— $$b(a+b)^n = b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{par (HR)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

— $$a(a+b)^n = a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}$$
$$= \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} a^p b^{n+1-p} \quad \text{en posant } p = k$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} \quad \text{en prenant } k = p$$

Ainsi,

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k}$$

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{(n+1)-1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)}$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n+1-k}$$
$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Or,

$$a^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{(n+1)-(n+1)} \text{ et } b^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^0 n^{n+1}$$

donc, on peut incorporer a^{n+1} et b^{n+1} dans la somme :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

L'hérédité est alors vérifiée. La formule est donc vraie pour tout entier naturel n.

Exercice n°9

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Calculons :

$$u_1 = \frac{1}{2-u_0} \qquad u_1 = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2-u_1} \qquad u_2 = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} \qquad u_2 = \frac{2}{3}$$

$$u_3 = \frac{1}{2-u_2} \qquad u_3 = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} \qquad u_3 = \frac{3}{4}$$

2. Posons $P(n)$ la propriété : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.
   — **Initialisation.**
   Faite dans la question 1.
   — **Hérédité.**
   Supposons que pour un entier naturel k, $P(k)$ est vraie (H.R.). Montrons alors que $P(k+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire que $u_{k+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

$$u_{k+1} = \frac{1}{2-u_n} = \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}} \quad \text{(H.R.)}$$
$$= \frac{1}{\frac{2(n+1)-n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}.$$

   L'hérédité est alors vérifiée.

   — **Conclusion.**
   Quel que soit l'entier naturel k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
   Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice n°10

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \quad , \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n + 2n + 3 - u_n \\ &= 2n + 3 > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

2. (a) Posons $P(n)$ la propriété : $u_n \geqslant n^2$.
   - **Initialisation.**
     $u_0 = 1 \geqslant 0$ donc $P(0)$ est vraie.
   - **Hérédité.**
     Supposons que pour un entier naturel k positif, $P(k)$ est vraie (H.R.). Montrons alors que $P(k+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire que $u_{k+1} \geqslant (k+1)^2$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \\ &\geqslant k^2 + 2k + 3 \quad \text{(H.R.)} \\ &\geqslant k^2 + 2k + 1 + 2 \\ &\geqslant (k+1)^2 + 2 \\ &\geqslant (k+1)^2 \end{aligned}$$

     L'hérédité est alors vérifiée.
   - **Conclusion.**
     Quel que soit l'entier naturel k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   (b) D'après le théorème de comparaison des suites et d'après la question précédente, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \geqslant \lim_{n\to+\infty} n^2$$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$; donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

3. Calculons les premiers termes de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= u_0 + 2\times 0 + 3 = 4 \\ u_2 &= u_1 + 2\times 1 + 3 = 9 \\ u_3 &= u_2 + 2\times 2 + 3 = 16 \\ u_4 &= u_3 + 2\times 3 + 3 = 25 \end{aligned}$$

On peut alors conjecturer que $u_n = (n+1)^2$. Montrons cela par récurrence.
- **Initialisation.**
  Faite précédemment.
- **Hérédité.**
  On suppose que pour un entier naturel k, $u_k = (k+1)^2$ (qui constitue la propriété $P(k)$). Montrons que $u_{k+1} = (k+2)^2$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \\ &= (k+1)^2 + 2k + 3 \\ &= k^2 + 4k + 4 \\ &= (k+2)^2 \end{aligned}$$

  L'hérédité est alors vérifiée.
- **Conclusion.**
  Quel que soit l'entier naturel k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Ainsi, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice n°11

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f :

x	0	5
$f(x)$	1 ↗	5

On définit alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et par l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.
On souhaite démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 5$.
- *Initialisation.*
  $u_0 = 1$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 5$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.
- *Hérédité.*
  Supposons que pour un entier k fixé, $0 \leqslant u_k \leqslant 4$.
  Alors, puisque f est croissante sur $[0;5]$, on peut prendre l'image de chaque membre de cet encadrement sans changer le sens des inégalités : les images de 0, u_k et 4 sont rangées dans le même ordre :

$$f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(5)$$

  soit :

$$1 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5 \qquad \text{et donc :} \qquad 0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 5.$$

  L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout entier naturel n.

Exercice n°12

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots$$

où $k! = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (k-1) \times k$.

1. Pour tout entier naturel k,

$$\begin{aligned} \frac{k}{(k+1)!} &= \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} \\ &= \frac{\cancel{(k+1)}}{k! \times \cancel{(k+1)}} - \frac{1}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$
$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right)$
$= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \right) + \cdots$
$+ \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right)$
$= \frac{1}{1!} - \cancel{\frac{1}{2!}} + \cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}} + \cancel{\frac{1}{3!}} - \cancel{\frac{1}{4!}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n!}} - \frac{1}{(n+1)!}$
$= 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

3. $\lim_{n \to +\infty} (n+1)! = +\infty$, donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$.
Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$.

Exercice n°13

1. $a_n = \frac{3n+2}{4n-1} = \frac{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n\left(4-\frac{1}{n}\right)} = \frac{3+\frac{2}{n}}{4-\frac{1}{n}}$, pour $n > 0$.
Or, d'après le cours, $\lim_{n \to +\infty} \frac{k}{n} = 0$ donc :
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{3}{4}}.$$

2. $b_n = \frac{n^2-3n+1}{n+7} = \frac{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{7}{n}\right)} = \frac{n\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{7}{n}}$, pour $n > 0$.
Or, $\lim_{n \to +\infty} \frac{a}{n^k} = 0$ donc :
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n \times 1}{1} = +\infty}.$$

3. $c_n = \frac{3n-7}{n^2+1} = \frac{n\left(3-\frac{7}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3-\frac{7}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$, pour $n > 0$.
Or, $\lim_{n \to +\infty} \frac{a}{n^k} = 0$ donc :
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} c_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0}.$$

Exercice n°14

Les limites des suites suivantes.

1. Pour cette question, on aura besoin de voir que : $n^2 = n \times n = n \times \sqrt{n} \times \sqrt{n}$.
Ainsi, $\frac{n^2}{\sqrt{n}} = n\sqrt{n}$.
$u_n = \frac{n^2+3n-2}{\sqrt{n}+1} = \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{n\sqrt{n}\left(1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$, pour $n > 0$.
Or, $\lim_{n \to +\infty} \frac{a}{n^k} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc :
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(n\sqrt{n}\right) = +\infty}.$$

2. $v_n = \sqrt{\frac{4n+1}{n+2}} = \sqrt{\frac{n\left(4+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}} = \sqrt{\frac{4+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}}$, pour $n > 0$.
Or, $\lim_{n \to +\infty} \frac{a}{n^k} = 0$ donc :
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2.}$$

3. Pour $n > 0$,
$$w_n = \frac{2\sqrt{n}+n-3}{\sqrt{n}+1} = \frac{n\left(\frac{2\sqrt{n}}{n}+1-\frac{3}{n}\right)}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{\sqrt{n}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}+1-\frac{3}{n}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$
Or, $\lim_{n \to +\infty} \frac{a}{n^k} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{a}{\sqrt{n}} = 0$ donc :
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{1} = +\infty}.$$

Exercice n°15

Pour tout entier naturel $n \neq 0$, on a :
$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1.$$
Ainsi, on a :
$$n-1 \leqslant n+\cos(n) \leqslant n+1$$
$$\iff \frac{n-1}{n^2} \leqslant \frac{n+\cos(n)}{n^2} \leqslant \frac{n+1}{n^2}.$$
De plus,
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$
De même,
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$$
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}.$$

Exercice n°16

Soit $a \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$ dans les cas suivants.

1. $u_n = \frac{n+\sin(n)}{n+\cos(n)} = \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{\sin(n)}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{\cos(n)}{n}\right)}$.

Or, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} -1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1 & \text{donc } -\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n} \\ -1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1 & \text{donc } -\frac{1}{n} \leqslant \frac{\cos(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n} \end{cases}$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$$

et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1}$$

2. $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \sin^p(a) = \dfrac{1}{n}\left(1 + \sin(a) + \sin^2(a) + \cdots + \sin^n(a)\right) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1-\sin^{n+1}(a)}{1-\sin(a)}$.
En effet, nous pouvons voir la somme :

$$1 + \sin(a) + \sin^2(a) + \cdots + \sin^n(a)$$

comme étant la somme :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

avec $q = \sin(a)$ ($a \neq \dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi$ donc $\sin(a) \neq 1$).
De plus,

$$\begin{aligned} -1 \leqslant \sin(a) \leqslant 1 &\Rightarrow -1 \leqslant \sin^{n+1}(a) \leqslant 1 \\ &\Rightarrow -1 \leqslant -\sin^{n+1}(a) \leqslant 1 \\ &\Rightarrow 0 \leqslant 1 - \sin^{n+1}(a) \leqslant 2 \\ &\Rightarrow 0 \leqslant \frac{1-\sin^{n+1}(a)}{1-\sin(a)} \leqslant \frac{2}{1-\sin(a)} \\ &\Rightarrow 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n} \times \underbrace{\frac{2}{1-\sin(a)}}_{\text{constante}}. \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times \underbrace{\frac{2}{1-\sin(a)}}_{\text{constante}} = 0$$

donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}.$$

Exercice n°17

Voici les limites.

1. Calculons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+\sin(n)}{n+1}$.
Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} -1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1 &\iff n^2 - 1 \leqslant n^2 + \sin(n) \leqslant n^2 + 1 \\ &\iff \frac{n^2-1}{n+1} \leqslant \frac{n^2+\sin(n)}{n+1} \leqslant \frac{n^2+1}{n+1} \end{aligned}$$

car, $n+1 > 0$. Or, $\dfrac{n^2-1}{n+1} = \dfrac{\cancel{n}\left(n - \frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

De plus, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \left(n - \frac{1}{n}\right) = +\infty \\ \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-1}{n+1} = +\infty$ (par quotient). On a :

$$\underbrace{\frac{n^2-1}{n+1}}_{\to+\infty} \leqslant \frac{n^2+\sin(n)}{n+1}$$

donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+\sin(n)}{n+1} = +\infty}$$

2. Calculons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n - n^3}{1+n^2}$.
Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 &\iff (-1) - n^3 \leqslant (-1)^n - n^3 \leqslant 1 - n^3 \\ &\iff \frac{-1-n^3}{1+n^2} \leqslant \frac{(-1)^n - n^3}{1+n^2} \leqslant \frac{1-n^3}{1+n^2} \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1-n^3}{1+n^2} = \frac{\cancel{n^2}\left(\frac{1}{n^2} - n\right)}{\cancel{n^2}\left(\frac{1}{n^2}+1\right)} = \frac{\frac{1}{n^2} - n}{\frac{1}{n^2}+1}.$$

De plus,

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - n\right) = -\infty \\ \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + 1\right) = 1 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2} - n}{\frac{1}{n^2}+1} = -\infty$ (par quotient). On a :

$$\frac{(-1)^n - n^3}{1+n^2} \leqslant \underbrace{\frac{1-n^3}{1+n^2}}_{\to-\infty}$$

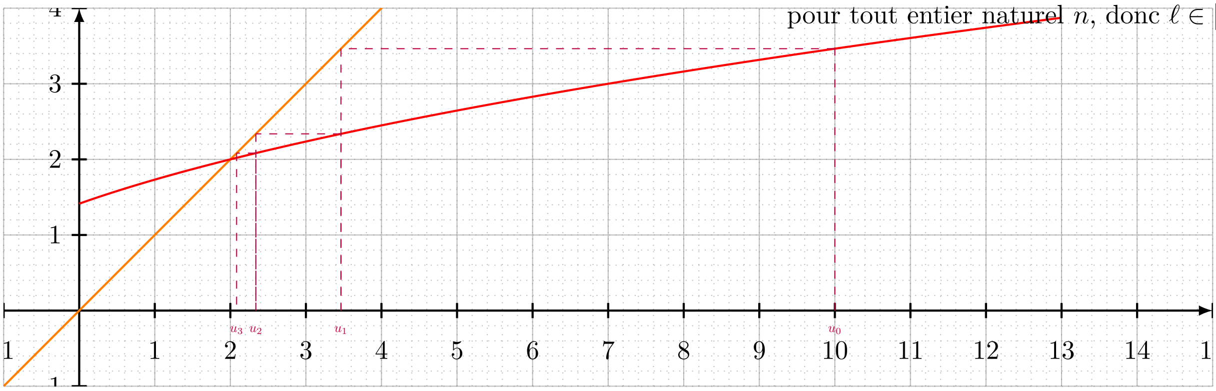
donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n - n^3}{1+n^2} = -\infty}$$

Exercice n°18

Dans un repère orthonormé, construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par son premier terme $u_0 = 10$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

Le fait que $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ nous dit que $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \sqrt{2+x}$. Il faut donc tracer la courbe représentative de la fonction f (en rouge ci-dessous) ainsi que la droite d'équation $y = x$ (en orange ci-dessous) pour transformer les images (en ordonnées) en abscisses.



On peut alors conjecturer que la limite de cette suite est l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec la droite, soit la solution de l'équation :

$$\begin{aligned} x = \sqrt{2+x} &\iff x^2 = 2+x \\ &\iff x^2 - x - 2 = 0, \qquad \Delta = 9. \\ &\iff x = 2. \end{aligned}$$

Exercice n°19

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

1. On a :
$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0.$$
Donc f est strictement croissante sur $[0;2]$.
On en déduit alors :
$$1 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$$
Or, $f(1) = \dfrac{3}{2} > 1$ et $f(2) = \dfrac{5}{3} < 2$.
Ainsi,
$$\boxed{x \in [1;2] \Rightarrow f(x) \in [1;2].}$$

2. Soit $P(n)$ la propriété : $u_n \in [1;2]$.
Démontrons qu'elle est vraie pour tout entier naturel n par récurrence.
— *Initialisation.*
$u_0 = 1 \in [1;2]$.
— *Hérédité.*
Supposons que $P(k)$ soit vraie, où k est un entier naturel. Montrons alors que $P(k+1)$ l'est aussi.
D'après la question précédente, on a :
$u_k \in [1;2] \Rightarrow f(u_k) \in [1;2]$.
Or, $f(u_k) = u_{k+1}$ donc $P(k+1)$ est vraie.
L'hérédité est alors vérifiée.
Ainsi, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
De plus, f est croissante sur $[1;2]$ donc $f(u_n) > u_n$, c'est-à-dire : $u_{n+1} > u_n$.

3. De la question précédente, on peut conclure que la suite (u_n) est croissante et bornée, donc majorée. Or, *toute suite croissante et majorée converge*. Donc (u_n) est convergente.
Posons alors $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Nous savons que $u_n \in [1;2]$ pour tout entier naturel n, donc $\ell \in [1;2]$.

On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = f(u_n) &\iff \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) \\ &\iff \ell = f(\ell) \quad \text{car } f \text{ est continue} \\ &\iff \ell = \frac{2\ell+1}{\ell+1} \\ &\iff \ell^2 + \ell = 2\ell + 1 \\ &\iff \ell^2 - \ell - 1 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $\ell^2 - \ell - 1$ est $\Delta = 5$ donc il possède deux racines :
$\ell_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\ell_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \in [1;2]$. Ainsi, $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice n°20

Soit la suit (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+6}{u_n+2} \quad , \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Posons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. On en déduit alors :
$$\begin{aligned} u_{n+1} = \frac{u_n+6}{u_n+2} &\Rightarrow \ell = \frac{\ell+6}{\ell+2} \\ &\Rightarrow \ell(\ell+2) = \ell+6 \\ &\Rightarrow \ell^2 + 2\ell - \ell - 6 = 0 \\ &\Rightarrow \ell^2 + \ell - 6 = 0. \end{aligned}$$
Ainsi, ℓ est bien une racine du polynôme P.

2. $x_1 = 2$ est une racine évidente de P ; de plus, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = -6$, donc $x_2 = -3$. Les deux racines de P donc sont $\alpha = 2$ et $\beta = -3$.

3. On a $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 3}$. Alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+3} \\ &= \frac{\frac{u_n+6}{u_n+2}-2}{\frac{u_n+6}{u_n+2}+3} \\ &= \frac{u_n+6-2u_n-4}{u_n+2} \times \frac{u_n+2}{u_n+6+3u_n+6} \\ &= \frac{-u_n+2}{4u_n+12} \\ &= -\frac{1}{4} \times \frac{u_n-2}{u_n+3} \\ &= -\frac{1}{4} v_n \; . \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-2}{u_0+3} = -\dfrac{1}{4}$ et de raison $q = -\dfrac{1}{4}$.

4. La suite (v_n) converge vers « 0 » comme suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1. Ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n-2}{u_n+3} = 0 &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_n-2) = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}. \end{aligned}$$

Exercice n°21

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{4u_n} \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$.

1. $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}-\frac{1}{2}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{4u_n-1}{4u_n} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{u_n-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{4u_n-1}{4u_n} - \frac{2u_n}{4u_n}} - \frac{1}{u_n-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{2u_n-1}{4u_n}} - \frac{1}{u_n-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{4u_n}{2u_n-1} - \frac{1}{u_n-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2u_n}{u_n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{u_n-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2\left(u_n-\frac{1}{2}\right)}{u_n-\frac{1}{2}} = 2. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc arithmétique de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{5}$ et de raison $r = 2$.

2. D'après ce qui précède, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ car $r > 0$ d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n-\frac{1}{2}} = +\infty \; ,$$

ce qui signifie que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(u_n - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}}$$

Exercice n°22

On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2n - 1 \end{cases}$$

1. On obtient,
   - $u_1 = -0{,}5$
   - $u_2 = 0{,}75$
   - $u_3 = 3{,}375$
   - $u_4 = 6{,}6875$
   - $u_5 = 10{,}34375$
   - $u_6 = 14{,}171875$
   - $u_7 = 18{,}0859375$
   - $u_8 = 22{,}04296875$
   - $u_9 = 26{,}021484375$.

   On peut alors conjecturer que (u_n) est strictement croissante à partir de $n = 1$.

2. (a) $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4(n+1) + 10 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 - 4n - 4 + 10 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 2n + 5 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 4n + 10) \\ &= \frac{1}{2}v_n \; . \end{aligned}$$

   On déduit alors que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4\times 0 + 10 = 11$.

   (b) On a alors : $v_n = 11 \times \dfrac{1}{2^n}$ et donc :

   $$u_n = v_n + 4n - 10 = \frac{11}{2^n} + 4n - 10.$$

   (c) $$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{11}{2^n} + 4n - 10\right) \\ &= 11 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} + 4\sum_{k=0}^{n} k - 10 \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= 11 \left(\frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}\right) + 4 \times \frac{n(n+1)}{2} - 10(n+1) \\ &= 22\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + 2(n-5)(n+1). \end{aligned}$$

Exercice n°23

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{2}{3}. \end{cases}$

1. Pour que (vn) soit géométrique de raison q, il faut que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= q v_n \\ \iff \quad \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3} + \lambda &= q\left(u_n + \lambda\right) \\ \iff \quad \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{4}{3} + 2\lambda\right) &= q\left(u_n + \lambda\right). \end{aligned}$$

Ainsi, il faut que $q = \frac{1}{2}$ et que $-\frac{4}{3} + 2\lambda = \lambda$, soit $\boxed{\lambda = \frac{4}{3}}$.

2. (vn) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, donc elle converge vers 0 (car sa raison est strictement comprise entre 0 et 1).

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n + \frac{4}{3}\right) = 0$, ce qui signifie que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{4}{3}}$.

Exercice n°24

On sait tous qu'il y a des années à coccinelles et d'autres sans !
On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = kx(1-x),$$

k étant un paramètre réel qui dépend de l'environnement.
Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des coccinelles reste inférieur à un million. L'effectif des coccinelles, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n avec u_n compris entre 0 et 1. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300 000 coccinelles, on prendra $u_0 = 0{,}3$.
On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus.
Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k.

1. Notons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
Alors,

$$u_{n+1} = f(u_n) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n).$$

Or, f est continue donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) = f(\alpha)$.
Ainsi,

$$\boxed{\alpha = f(\alpha)}.$$

2. $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$, $u_0 = 0{,}4$.
   (a) $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n - u_n^2 - u_n \\ &= -u_n^2 \\ &\leqslant 0 \text{ car un carré est toujours positif ou nul.} \end{aligned}$$
   Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$; la suite (u_n) est donc décroissante.

   (b) — *Initialisation.*
   $u_0 = 0{,}4$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.
   — *Hérédité.*
   On suppose que pour un entier n donné, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$; de plus, par hypothèse de récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et donc :

   $$0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1.$$

   Par produit, $0 \leqslant u_n(1-u_n) \leqslant 1$. Donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
   L'hérédité est alors vérifiée : $u_n \Rightarrow u_{n+1}$.
   Par conséquent, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

   (c) La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle converge. Sa limite α vérifie :

   $$\begin{aligned} \alpha = \alpha(1-\alpha) &\iff \alpha = \alpha - \alpha^2 \\ &\iff 0 = -\alpha^2 \\ &\iff \alpha = 0. \end{aligned}$$

   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   (d) Avec de telles hypothèses, la population de coccinelles tend à disparaître.

3. $u_{n+1} = 1{,}8u_n(1-u_n)$, $u_0 = 0{,}3$.
   (a) $f(x) = 1{,}8x(1-x) = 1{,}8(x-x^2)$ donc $f'(x) = 1{,}8(1-2x)$.
   Donc $$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 &\iff 1 - 2x \geqslant 0 \\ &\iff 1 \geqslant 2x \\ &\iff x \leqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$
   De plus, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}8 \times 0{,}5 \times 1{,}5 = 0{,}45 \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.
   D'où le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$0{,}45$	$\searrow$	0

   (b) — *Initialisation.*
   $u_0 = 0{,}3$ et $u_1 = f(0{,}3) = 1{,}8 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}378$.
   Donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \frac{1}{2}$.
   — *Hérédité.*
   Supposons que pour un entier n donné, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

   $$\begin{aligned} & 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \\ \iff \quad & f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{car } f \text{ est c} \\ \iff \quad & 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}. \text{ L'hérédité est alors vérifi} \end{aligned}$$

   Ainsi, la propriété est vraie pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$

(c) De la question précédente, on déduit que (u_n) est croissante ($u_{n+1} \geqslant u_n$) et majorée (par $\frac{1}{2}$) donc elle converge. Sa limite α vérifie :

$$\begin{aligned}\alpha = f(\alpha) &\iff \alpha = 1{,}8\alpha(1-\alpha) \iff 1 = 1{,}8(1-\alpha)\\ &\iff \frac{1}{1{,}8} = 1-\alpha \iff \alpha = 1 - \frac{1}{1{,}8}\\ &\iff \alpha = \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n \approx 0{,}444\,444\,444$.

(d) On conclut de la question précédente qu'à long terme, la population de coccinelles se rapprochera de 4 444 444.

Exercice n°25

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation :

$$(E) : \qquad e^x = \frac{1}{x}$$

admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
On pose pour tout réel x :

$$f(x) = x - e^{-x}.$$

1. $e^x = \frac{1}{x} \iff e^{-x} = x$
$\iff x - e^{-x} = 0$

Ainsi, x est solution de (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

2. (a) $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$ car une exponentielle est toujours strictement positive.

Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) — $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} (-e^{-x}) = -\infty$;
par somme, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty < 0$;
— $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0$;
— f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), il existe une unique valeur α sur $\mathbb{R}$ telle que $f(\alpha) = 0$.

(c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}} \approx -0{,}12$ et $f(1) = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63 > 0$ donc $\alpha \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

(d) La fonction f est strictement croissante sur $[0;\alpha]$ et $\alpha \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ donc $f(x) < 0$ sur $[0;\alpha]$.

3. $$\begin{aligned} g(x) = x &\iff \frac{1+x}{1+e^x} = x\\ &\iff 1+x = x(1+e^x)\\ &\iff 1+x = x + xe^x\\ &\iff 1 = xe^x\\ \text{car } \alpha \neq 0 \quad &\iff \frac{1}{e^x} = x\\ &\iff x - \frac{1}{e^x} = 0\\ &\iff x - e^{-x} = 0\\ &\iff f(x) = 0\end{aligned}$$

4. α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$, donc l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ car les deux équations sont équivalentes.

5. $$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1\times(1+e^x) - (1+x)\times e^x}{(1+e^x)^2}\\ &= \frac{1 + e^x - e^x - xe^x}{(1+e^x)^2}\\ &= \frac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2}\end{aligned}$$

Ainsi, $g'(x) > 0 \iff 1 - xe^x > 0$ car $(1+e^x)^2 > 0$ pour tout réel x.
Or, $1 - xe^x > 0 \iff 1 > xe^x \iff \frac{1}{e^x} > x$
$\iff x - e^{-x} < 0 \iff f(x) < 0$
$\iff x \in [0;\alpha]$

Ainsi, g est croissante sur $[0;\alpha]$

6. — $u_0 = 0$ et $u_1 = g(u_0) = g(0) = \frac{1}{2}$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$.
L'initialisation est faite.
— Supposons que pour un entier n donné, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
Comme g est croissante sur $[0;\alpha]$, alors,

$$g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(\alpha)\ ,$$

soit :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$$

car $g(\alpha) = \alpha$ d'après la question 4.
Comme $0 < \frac{1}{2}$, on a bien :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha.$$

L'hérédité est alors vérifiée ; par conséquent, pour tout entier naturel n,

$$\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.}$$

7. De la question précédente, on déduit que (u_n) est croissante et majorée.
Or, *toute suite croissante et majorée converge*.
Donc, (u_n) converge.

8. De l'égalité $u_{n+1} = g(u_n)$, on déduit :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} &= \lim_{n\to+\infty} g(u_n)\\ \ell &= g\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) \qquad \text{car } g \text{ est continue}\\ \ell &= g(\ell)\end{aligned}$$

Ainsi, ℓ est solution de l'équation $g(x) = x$. Or, α est l'unique solution de cette équation.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

---

9. On a :

blue !30 n	u_n
0	0
1	0,5
2	0,566 311 003 2
3	0,567 143 165
4	0,567 143 290 4

Ainsi, $u_4 \approx 0{,}567\,143$.