Corrigés

Série d'exercices Classe : Terminale Maths Spé Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

1. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 1$
$$= x^3\left(1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$
Or, pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2. $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \sin X = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} = 0}.$$

3. $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$
$$= \sqrt{x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}$$
$$= x\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} \quad \text{pour } x > 0.$$
Or, pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 1$.
Donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.

4. $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} = 0^+\end{array}\right\}$$
$\Rightarrow$ par quotient : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty}$.

Exercice n°2

Voici les limites.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3-x}{4+x}$.
$$\frac{3-x}{4+x} = \frac{x\left(\frac{3}{x} - 1\right)}{x\left(\frac{4}{x} + 1\right)}, \quad x \neq 0$$
$$= \frac{\frac{3}{x} - 1}{\frac{4}{x} + 1}, \quad x \neq 0.$$
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc :
— $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{x} - 1\right) = -1$;
— $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{4}{x} + 1\right) = 1$.
Ainsi, par quotient,
$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3-x}{4+x} = -1.}$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 1}$.
$$\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 1} = \frac{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 + \frac{1}{x}\right)}, \quad x \neq 0$$
$$= \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}}, \quad x \neq 0.$$
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc :
— $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 1$;
— $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$.
Ainsi, par quotient,
$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2}}.$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 5x - 7}{x^2 + 3x - 1}$.
$$\frac{x^2 + 5x - 7}{x^2 + 3x - 1} = \frac{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}, \quad x \neq 0$$
$$= \frac{1 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2}}{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}, \quad x \neq 0.$$
Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc :
— $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2}\right) = 1$;
— $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1$.
Ainsi, par quotient,
$$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2 + 5x - 7}{x^2 + 3x - 1} = 1}.$$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^2 + 7x - 9}{x - 1}$.
$$\frac{4x^2 + 7x - 9}{x - 1} = \frac{x^2\left(4 + \frac{7}{x} - \frac{9}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}, \quad x \neq 0$$
$$= \frac{x\left(4 + \frac{7}{x} - \frac{9}{x^2}\right)}{1 - \frac{1}{x}}, \quad x \neq 0.$$
— $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(4 + \frac{7}{x} - \frac{9}{x^2}\right) = -\infty$;
— $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$.
Ainsi, par quotient,
$$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^2 + 7x - 9}{x - 1} = -\infty.}$$

Exercice n°3

Voici les limites.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}&=\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}\\&=\frac{x+2-(x-1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}\\&=\frac{3}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)=+\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}=0$.

On en déduit alors que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)=0}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)$.

$$\begin{aligned}&\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}\\&=\frac{\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}\right)}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}}\\&=\frac{x^2+3x+1-(2x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}}\\&=\frac{-x^2+2x}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}}\\&=\frac{x^2\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)}}\\&=\frac{x^2\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}},\text{ pour } x>0\\&=\frac{\cancel{x}\times x\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left[\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}\right]},\text{ pour } x>0\\&=\frac{x\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}},\text{ pour } x>0\end{aligned}$$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ pour $n\in\mathbb{N}$ donc :

— $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(-1+\frac{2}{x}\right)=-\infty$ (par produit)

— $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}\right)=1+\sqrt{2}>0$

Donc, par quotient, on déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)=-\infty.$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{x^2-3}\right)$.

$$\begin{aligned}&\sqrt{3-x}-\sqrt{x^2-3}\\&=\frac{\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{x^2-3}\right)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{x^2-3}\right)}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x^2-3}}\\&=\frac{3-x-x^2+3}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x^2-3}}\\&=\frac{-x^2-x+6}{\sqrt{3-x}+\sqrt{x^2-3}}\\&=\frac{x^2\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}}\\&=\frac{x^2\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\left[\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right]}\\&=\frac{x^2\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x}\right)}{-x\left[\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right]},\quad\text{pour } x<0\\&=\frac{-x\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x}\right)}{\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}},\quad\text{pour } x<0\end{aligned}$$

— $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{6}{x}\right)\right]=-\infty$ (par produit)

— $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)=1$

Ainsi, par quotient,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{x^2-3}\right)=-\infty}$$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{10-x}\right)$.

$$\begin{aligned}&\sqrt{5-x}-\sqrt{10-x}\\&=\frac{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{10-x}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{10-x}\right)}{\sqrt{5-x}+\sqrt{10-x}}\\&=\frac{5-x-10+x}{\sqrt{5-x}+\sqrt{10-x}}\\&=\frac{-5}{\sqrt{5-x}+\sqrt{10-x}}.\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{5-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{10-x}=+\infty$ donc par somme,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{10-x}\right)=+\infty.$$

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-5}{X}\right)=0$, en considérant que $X=\sqrt{5-x}+\sqrt{10-x}$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{10-x}\right)=0.}$$

Exercice n°4

Voici les limites.

1. $$\frac{2x^2-5x+3}{3x^2+4x-1} = \frac{x^2\left(2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} \quad \text{pour } x\neq 0$$
$$= \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}} \quad \text{pour } x\neq 0$$

Or, pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc :

— $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right) = 2$;
— $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = 3$.

Ainsi, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+3}{3x^2+4x-1} = \frac{2}{3}}$.

2. $$\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3} = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(x+\frac{3}{x}\right)} \quad \text{pour } x\neq 0$$
$$= \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)} \quad \text{pour } x>0$$
$$= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\left(2+\frac{3}{x}\right)}$$

Or, pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donc :

— $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$;
— $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2+\frac{3}{x}\right) = 2$.

Par quotient, on a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3} = \frac{1}{2}}$.

3. $\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}$
$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{x^2+3-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ donc par somme :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}\right) = +\infty$. Ainsi, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\right) = 0}$.

4. $\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x+1}$
$$= \sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)} - \sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} \quad \text{pour } x\neq 0$$
$$= x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} - x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \quad \text{pour } x>0$$
$$= x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right).$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{3}{x^2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 0$ donc par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = 1$.

Ainsi, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x+1}\right) = +\infty}$

Exercice n°5

Soit $f(x) = x+\sqrt{x^2+1}$.

— Limite en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+1) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty.$$

Ainsi, par somme,

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = +\infty}.$$

— Limite en $-\infty$.

$$f(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

De plus,

$$\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+1) = +\infty$$

donc

$$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty.$$

Ainsi, par somme,

$$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x-\sqrt{x^2+1}\right) = -\infty.$$

Par passage à l'inverse, on a alors :

$$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}\right) = 0.$$

Exercice n°6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}/\{5\}$ par :

$$f(x) = \frac{-3x+1}{x-5}.$$

L'existence d'une asymptote horizontale est directement liée à l'existance d'une limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$.

Calculons donc, par exemple, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en notant que $f(x)$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-3x+1}{x-5} \\ &= \frac{x\left(-3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}, \quad x \neq 0 \\ &= \frac{-3+\frac{1}{x}}{1-\frac{5}{x}}, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, par quotient, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -3.$$

Ainsi, la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = -3$.

Exercice n°7

Voici les limites.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x}$.

   On sait d'après le cours (croissance comparée) que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc, en inversant l'expression, on a :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X} = 0.}$$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{7+2x}$.

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{7+2x} &= \frac{e^x}{x\left(\frac{7}{x}+2\right)} \\ &= \frac{e^x}{x} \times \frac{1}{2+\frac{7}{x}}. \end{aligned}$$

   Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2+\frac{7}{x}} = \dfrac{1}{2}$.

   Ainsi, par produit, on a :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{7+2x} = +\infty.}$$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{5x}}{3x-2}$.

$$\begin{aligned} \frac{e^{5x}}{3x-2} &= \frac{e^{\color{red}{5x}}}{\frac{3}{5} \times \color{red}{5x} - 2} \\ &= \frac{e^{5x}}{\frac{3}{5}\left(5x - \frac{2}{\frac{3}{5}}\right)} \\ &= \frac{e^{5x}}{\frac{3}{5}\left(5x - \frac{10}{3}\right)} \\ &= \frac{5}{3} \times \frac{e^{5x}}{5x - \frac{10}{3}} \\ &= \frac{5}{3} \times \frac{e^{5x}}{5x\left(1 - \frac{10}{3 \times 5x}\right)} \\ &= \frac{5}{3} \times \frac{e^{5x}}{5x} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3x}}. \end{aligned}$$

   — $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{5x}}{5x} \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ en posant $X = 5x$;
   — $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{2}{3x}\right) = 1$;
   — $\dfrac{5}{3} > 0$.

   Ainsi, par produit, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{5x}}{3x-2} = +\infty.}$$

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+5)e^{2x}$.

   On va tenter de faire apparaître la croissance comparée $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

$$\begin{aligned} (x+5)e^{2x} &= \left(\frac{1}{2} \times \color{red}{2x} + 5\right) e^{\color{red}{2x}} \\ &= \frac{1}{2} \times 2xe^{2x} + 5e^{2x}. \end{aligned}$$

   — $\lim\limits_{x \to -\infty} 2xe^{2x} = \lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$, avec $X = 2x$;
   — $\lim\limits_{x \to -\infty} 5e^{2x} = 0$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

   Ainsi, par somme,

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} (x+5)e^{2x} = 0.}$$

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1}e^{-x}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1}e^{-x} &= \frac{\sqrt{x^2+1}}{e^x} \\ &= \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{e^x}, \quad x > 0 \\ &= \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{e^x}, \quad x > 0 \\ &= \frac{x}{e^x} \times \sqrt{1+\frac{1}{x}}, \quad x > 0. \end{aligned}$$

   — $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$;
   — $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x}} = 1$.

Ainsi, par produit,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}e^{-x} = 0.}$$

Exercice n°8

Voici les limites.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\sin x}{x^2}$. Pour tout réel x non nul,

$$\begin{aligned} -1 \leqslant \sin x \leqslant x &\iff -1 \leqslant -\sin x \leqslant 1 \\ &\iff 0 \leqslant 1-\sin x \leqslant 2 \\ &\iff 0 \leqslant \frac{1-\sin x}{x^2} \leqslant \frac{2}{x^2}. \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\sin x}{x^2} = 0.}$$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos(x)e^x$.
Pour tout réel x,

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \iff -e^x \leqslant \cos(x)e^x \leqslant e^x.$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \cos(x)e^x = 0}$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-\sin x)$. Pour tout réel x,

$$-1 \leqslant -\sin x \leqslant x \iff \boxed{x^2-1 \leqslant x^2-\sin x} \leqslant x^2+1$$

En tenant compte de ce qui est encadré, et d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2-1) = +\infty \iff \boxed{\lim_{x\to+\infty} (x^2-\sin x) = +\infty}$$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x+3}{x-7\sin x}$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} & -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \\ \iff & -7 \leqslant -7\sin x \leqslant 7 \\ \iff & x-7 \leqslant x-7\sin x \leqslant x+7 \\ \iff & \frac{1}{x+7} \leqslant \frac{1}{x-7\sin x} \leqslant \frac{1}{x-7} \\ \iff & \frac{4x+3}{x+7} \leqslant \frac{4x+3}{x-7\sin x} \leqslant \frac{4x+3}{x-7} \quad \text{car } 4x+3>0. \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x+3}{x\pm 7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{x} = 4$.
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{4x+3}{x-7\sin x} = 4.}$$

Exercice n°9

Voici les limites.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{3x-5}{x-2}$.
— $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} (3x-5) = 3\times2-5 = 1 > 0$
— $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} (x-2) = 0^-$ (« 0 » par valeurs négatives)

Or, $\lim\limits_{\substack{X\to0\\x<0}} \dfrac{1}{X} = -\infty$ donc :

$$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{3x-5}{x-2} = -\infty.$$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{x-9}{x-3}$.
— $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} (x-9) = 3-9 = -6 < 0$
— $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} (x-3) = 0^+$

Or, $\lim\limits_{\substack{X\to0\\X>0}} \dfrac{-6}{X} = -\infty$ donc :

$$\lim_{\substack{x\to3\\x>3}} \frac{x-9}{x-3} = -\infty.$$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}} \dfrac{x^2+x+1}{2x^2-9x-5}$.
— $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}} (x^2+x+1) = 5^2+5+1 = 31 > 0$
— Remarquons que les racines de $2x^2-9x-5$ sont $-\dfrac{1}{2}$ et 5.
Par conséquent, $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}} (2x^2-9x-5) = 0^-$ car en prenant $x=0$ (entre les racines), on trouve $-5<0$.

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x\to5\\x<5}} \frac{x^2+x+1}{2x^2-9x-5} = -\infty.$$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{3x^2-5x+2}{x^2+8x-9}$.
— $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} (3x^2-5x+2) = 0$.
— $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} (x^2+8x-9) = 0$.

Par conséquent, « 1 » est une racine du numérateur et du dénominateur. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{3x^2-5x+2}{x^2+8x-9} &= \frac{(x-1)(3x-2)}{(x-1)(x+9)} \\ &= \frac{3x-2}{x+9}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{3x^2-5x+2}{x^2+8x-9} = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{3x-2}{x-9} = \frac{3\times1-2}{1-9} = -\frac{1}{8}.$$

5. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \dfrac{3x-5}{x^2+2x-8}$.

— $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (3x-5) = 3\times 2 - 5 = 1 > 0\,;$

— Remarquons que x^2+2-8 admet pour racines -4 et 2, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x^2+2x-8) = 0^+$ (en prenant $x=3$, donc entre les racines, on trouve $7>0$).

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{3x-5}{x^2+2x-8} = +\infty.$$

6. $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{2x^2+3x+1}{-5x^2-x+4}$

— $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} (2x^2+3x+1) = 0$

— $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} (-5x^2-x+4) = 0$

Cela signifie que l'on peut factoriser par $x-(-1) = x+1$ au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{2x^2+3x+1}{-5x^2-x+4} = \frac{(x+1)(2x+1)}{(x+1)(4-5x)} = \frac{2x+1}{4-5x} \text{ pour } x\neq -1.$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{2x^2+3x+1}{-5x^2-x+4} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{2x+1}{4-5x} = \frac{-1}{9}.$$

Exercice n°10

Voici les limites.

1. $$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x-1} = \frac{\sqrt{(x-1)}\times\sqrt{(x+1)}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Notons que le domaine de définition de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ est $]-\infty;-1]\cup]1;+\infty[$ donc quand on parle de la limite de $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ en 1, il est sous-entendu que $x>1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x+1) = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1) = 0^+ \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ par quotient : $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = +\infty.$

Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = +\infty.$

2. $$\frac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x-2} = \frac{\left(\sqrt{x^2+x-2}-2\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)} = \frac{x^2+x-2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)} = \frac{x^2+x-6}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)}$$

On factorise x^2+x-6 en calculant son discriminant.

$$= \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\right)} = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x-2}+2} \quad \text{pour } x\neq 2$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x-2}+2} = \frac{2+3}{\sqrt{2^2+2-2}+2} = \frac{5}{4}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x-2} = \dfrac{5}{4}.$

3. On pose $u(x) = \cos x$. Alors, $u'(x) = -\sin x$ et :

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos x+1}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{u(x)-u(\pi)}{x-\pi} = u'(\pi) = -\sin\pi = 0.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos x+1}{x-\pi} = 0.$

4. On pose $u(x) = \sqrt{x+1}$. Alors, $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}.$

En effet,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{u(x)-u(1)}{x-1} = u'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice n°11

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables en un nombre réel a telles que $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$.

1. On peut écrire :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times \frac{x-a}{g(x)-g(a)}$$

car $f(a) = g(a) = 0$.

Or, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ d'après la définition du nombre dérivé (vue en classe de première).

De même, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$ donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{g(x)-g(a)} = \dfrac{1}{g'(a)}$ ($g'(a)\neq 0$ par hypothèses).

Ainsi,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times \frac{x-a}{g(x)-g(a)} = f'(a) \times \frac{1}{g'(a)}$$

et donc :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

2. Posons $f(x) = \cos(5x) - \cos(3x)$ et $g(x) = \sin(4x) - \sin(3x)$.
Alors, $f'(x) = -5\sin(5x) + 3\sin(3x)$ et $g'(x) = 4\cos(4x) - 3\cos(3x)$.
Ainsi, $f'(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.
f et g vérifient toutes les conditions nécessaires pour utiliser la règle de l'Hospital donc :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(5x) - \cos(3x)}{\sin(4x) - \sin(3x)} = 0.$$

Exercice n°12

Voici les limites.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$.
   — $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^x - 1\right) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$
   — $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^{2x} - 1\right) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

   On a donc une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ » donc on pense à faire apparaître un ou plusieurs taux d'accroissement.
   $$\frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} = \frac{e^x - 1}{x - 0} \times \frac{x - 0}{e^{2x} - 1}.$$
   — $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{u(x) - u(0)}{x - 0} = u'(0) = e^0 = 1$ avec $u(x) = e^x$ et donc $u'(x) = e^x$;
   — $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - 0}{e^{2x} - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - 0}{v(x) - v(0)} = \dfrac{1}{v'(0)} = \dfrac{1}{2e^0} = \dfrac{1}{2}$ avec $v(x) = e^{2x}$ et donc $v'(x) = 2e^{2x}$.

   On en déduit alors que :
   $$\lim_{x\to 0} dfrace^x - 1e^{2x} - 1 = \frac{1}{2}.$$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{2e^{x-1}}{e^{x-1} - 1}$.
   — $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} 2e^{x-1} = 2 > 0$
   — $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(e^{x-1} - 1\right) = 0^-$

   Ainsi, par quotient,
   $$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{2e^{x-1}}{e^{x-1} - 1} = -\infty.$$

Exercice n°13

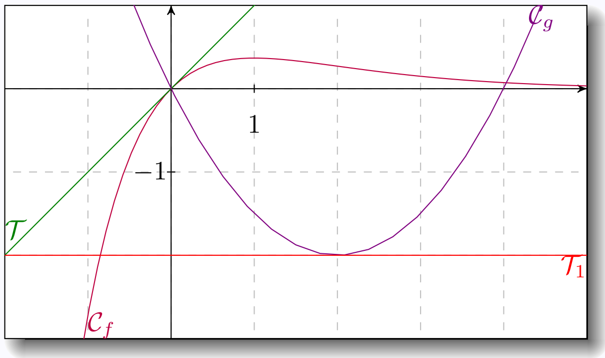
On donne le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]2; +\infty[$ page suivante.
On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]2; +\infty[$.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On suppose de plus que $f(5) = 0$ et que $f'(5) = -2$.

À l'aide du tableau de variations, répondre aux questions suivantes.
Aucune justification n'est demandée.

x	2		3		10		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-5	$\nearrow$	4

1. La tangente à $\mathcal{C}$ en $x = 3$ est horizontale ; comme $f(3) = 6$, son équation est : $\underline{y = 6}$.
2. Il y a deux solutions à l'équation $f(x) = 4$: l'une sur l'intervalle $[2; 3]$ et l'autre sur l'intervalle $[3; 10]$.

Exercice n°14

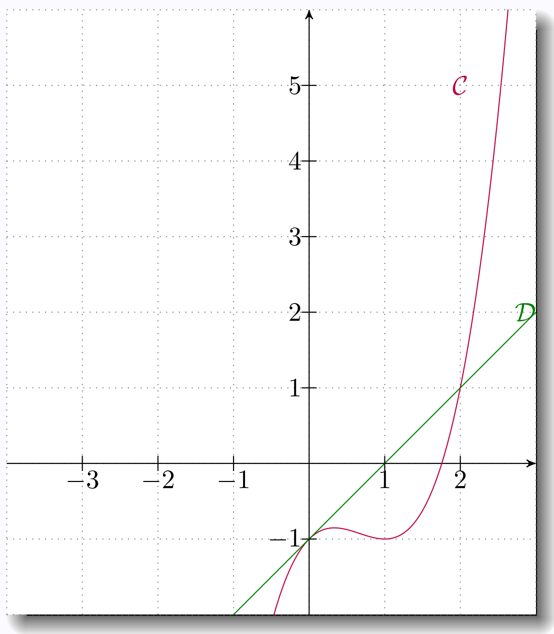


— $\mathcal{T}$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
— $\mathcal{T}_1$ est la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2.
— $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ se coupent en deux points d'abscisses respectives 0 et 4.

1. $f'(0) = 1$ car $f'(0)$ représente le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$. Et pour calculer le coefficient directeur de cette droite, on considère deux points qui sont sur cette droite : par exemple, $A(-1; -1)$ et $O(0; 0)$.
   $$f'(0) = \frac{y_O - y_A}{x_O - x_A} = \frac{0 - (-1)}{0 - (-1)} = 1.$$
   $g'(2) = 0$ car la tangente à $\mathcal{C}_g$ est horizontale, et comme toute droite horizontale, elle a un coefficient directeur nul.
2. $f(x) \geqslant g(x) \iff x \in [0; 4]$ car c'est sur cet intervalle que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

Exercice n°15

Une fonction f est représentée par la courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous.



1. $f(0)$ est l'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0 : c'est le point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées. Donc $\boldsymbol{f(0) = -1}$.

   $f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. C'est donc le coefficient directeur de $\mathcal{D}$. Donc $\boldsymbol{f'(0) = 1}$ (les points de coordonnées $(0;-1)$ et $(1;0)$ sont sur la droite donc le coefficient directeur est $\dfrac{y_b - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-(-1)}{1-0} = 1$.

2. L'énoncé dit que le point de la courbe d'abscisse 1 est un minimum local. Donc $\boldsymbol{f'(1) = 0}$.

3. $\mathcal{D}$ a pour équation $y = x - 1$ (coefficient directeur égal à 1 et coupe l'axe des ordonnées en -1). Donc l'équation revient à trouver les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.

   <u>Les solutions sont donc $x = 0$ et $x = 2$.</u>

4. La fonction f est croissante jusqu'à $\dfrac{1}{3}$, puis décroissante jusqu'à 1, puis croissante, d'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice n°16

La courbe suivante représente une fonction f sur $[-3;5]$.
La droite $\mathcal{T}_1$ est tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
La droite $\mathcal{T}_2$ est tangente à la courbe au point d'abscisse 3,5.

1. $f(0) = 1$ (cela correspond à l'ordonnée du point d'abscisse 0 qui est sur la courbe).

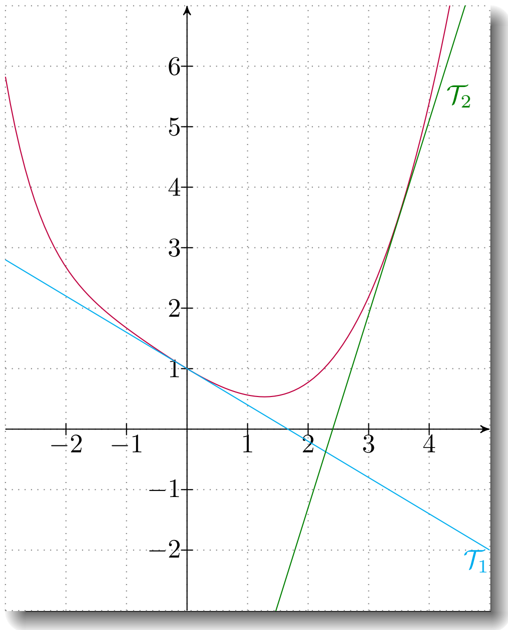
   $f'(0) = -\dfrac{3}{5}$. Pour déterminer cette valeur, on prend deux points de la tangente à la courbe passant par le point d'abscisse $x = 0$. Les points $A(0;1)$ et $B(5;-2)$ sont sur cette tangente. On calcule alors la pente de cette droite :

$$f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-1}{5-0} = -\frac{3}{5}.$$

2. $f(3{,}5) \approx 3{,}5$ et $f'(3{,}5) \approx 3{,}2$.

3. Le tableau de signes de la fonction f' est le suivant :

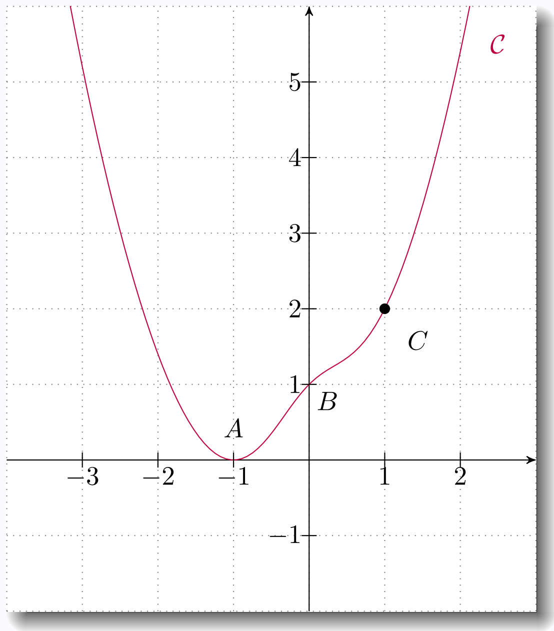
x	$-\infty$		$1{,}5$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	



Exercice n°17

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est celle d'une fonction f telle que :

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x^2+1}.$$



On sait :

— Condition (1) : que les points $A(-1;0)$, $B(0;1)$, $C(1;2)$ appartiennent à $\mathcal{C}$;

— Condition (2) : l'axe des abscisses est tangente à $\mathcal{C}$ au point A.

1. $f'(x) = 2ax + b - \dfrac{2dx}{(x^2+1)^2}$.

   La condition (2) permet d'écrire : $f'(-1) = 0$, soit :

$$-2a + b + \frac{1}{2}d = 0.$$

2. La condition (1) permet d'écrire :

   - $A(-1;0) \in \mathcal{C} \Longrightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow a - b + c + \frac{1}{2}d = 0$
   - $B(0;1) \in \mathcal{C} \Longrightarrow f(0) = 1 \Rightarrow c + d = 1$

- $C(1;2) \in \mathcal{C} \Longrightarrow f(1) = 2 \Rightarrow a+b+c+\frac{1}{2}d = 2$

3. Nous avons alors le système suivant : $\begin{cases} -2a+b+\frac{1}{2}d & = 0 \quad (E_1) \\ c+d & = 1 \quad (E_2) \\ a-b+c+\frac{1}{2}d & = 0 \quad (E_3) \\ a+b+c+\frac{1}{2}d & = 2 \quad (E_4) \end{cases}$ En faisant $(E_4)-(E_3)$, on arrive à l'équation :

$$(E_4)-(E_3) \quad : \quad 2b = 2$$

Ainsi, $\underline{b=1}$, d'où le système suivant : $\begin{cases} -2a+\frac{1}{2}d & = -1 \quad (E_1') \\ c+d & = 1 \quad (E_2') \\ a+c+\frac{1}{2}d & = 1 \quad (E_3') \end{cases}$ En faisant $(E_3')-(E_2')$, on a :

$$(E_3')-(E_2') \quad : \quad a-\frac{1}{2}d = 0$$

Soit : $\underline{d=2a}$. L'équation (E_1') est donc équivalente à :

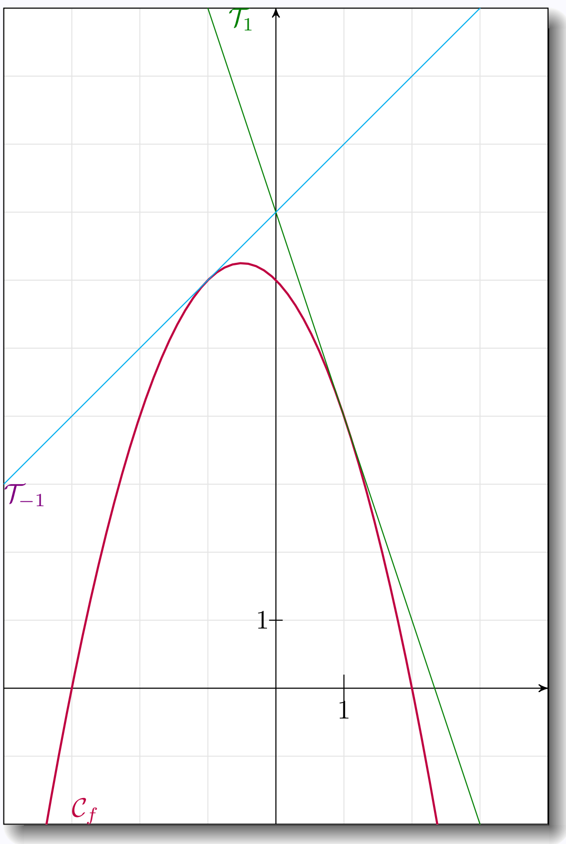
$$-d+\frac{1}{2}d = -1$$

Soit : $\underline{d=2}$ et donc $\underline{a=1}$. L'équation (E_2') donne alors : $c+2=1$, soit $\underline{c=-1}$.

Finalement, on a : $\boxed{f(x) = x^2+x-1+\dfrac{2}{x^2+1}}$.

Exercice n°18

On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f ainsi que deux de ses tangentes $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_{-1}$.



1. $f(0) = 6$ car $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées en un point d'ordonnée égale à 6.
   De plus, $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$. Donc $\underline{c=6}$.
2. $f'(x) = 2ax+b$.
3. $f'(1) = -3$ car le coefficient directeur de $\mathcal{T}_1$ est égal à -3.
   $f'(-1) = 1$ car le coefficient directeur de $\mathcal{T}_{-1}$ est égal à 1.
   $f'(1) = 2a+b = -3$ et $f'(-1) = -2a+b = 1$. D'où :
   $$\begin{cases} 2a+b = -3 \\ -2a+b = 1 \end{cases} \Longrightarrow (2a+b)+(-2a+b) = -3+1 \Longrightarrow b = -1.$$
   alors,
   $$2a+b = -3 \Longrightarrow 2a+(-1) = -3 \Longrightarrow 2a = -2 \Longrightarrow a = -1.$$
4. L'équation $f(x) = 0$ admet pour solutions -3 et 2. En effet, $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives -3 et 2.
   $f(x) = -x^2-x+6$ donc son discriminant est :
   $$\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4\times(-1)\times 6 = 25,$$
   d'où les deux racines :
   $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$
   et
   $$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{-2} = \frac{6}{-2} = -3.$$

Exercice n°19

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2+3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2+3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Sur $]-\infty;1[$, f est une fonction polynôme de degré 2 donc continue ;
- sur $]1;+\infty[$, f est une fonction affine donc continue ;
- de plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = (1-1)^2+3 = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = 1+2 = 3$, donc f est continue en 1.

<u>Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$.</u>

Exercice n°20

On définit la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2+3x-k & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^x+2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2+3x-k & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^x+2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, g est continue comme fonction polynôme d'une part, et exponentielle d'autre part.

Pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$, il faut que g soit continue en 0, c'est-à-dire que :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \left(x^2+3x-k\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(e^x+2\right),$$

soit quand :

$$-k = e^0+2 \qquad \text{donc} \qquad k=-3.$$

Exercice n°21

On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D} =]-\infty;0[\cup]0;4]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{4-x}-2} \\ f(2)=0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0} \left[(x-2)\left(\sqrt{4-x}+2\right)\right] = -8 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} (-x) = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

(par quotient) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$ donc f n'est pas continue en 0.

Calculons $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2} (x-2)\left(\sqrt{4-x}+2\right) = 0^- \\ \lim\limits_{x\to 2} (-x) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

(par quotient) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$

Ainsi, $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

La fonction f est donc continue en 0.

La fonction $x \mapsto x-2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{4-x}-2$ est dérivable partout où $4-x>0$, donc pour $x<4$, et s'annule pour $x=0$.

La fonction $X \mapsto \dfrac{1}{X}$ est dérivable pour tout X non nul.

Ainsi, f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;4[$.

— **Dérivabilité en 4.**
Le taux d'accroissement de f en 0 est :

$$\begin{aligned} \tau(h) &= \frac{f(4-h)-f(4)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \times \frac{2-h}{\sqrt{h}-2} \\ &= \frac{1}{h} \times \frac{2-h}{\sqrt{h}-2} \times \frac{\sqrt{h}+2}{\sqrt{h}+2} \\ &= \frac{1}{h} \times \frac{(2-h)\left(\sqrt{h}+2\right)}{h-4} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\h>0}} \tau(h) = -\infty$.

La fonction f n'est donc pas dérivable en 4.

— **Dérivabilité en 0.**
La fonction f n'est pas continue en 0, donc elle n'est pas dérivable en 0.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f (notée $\mathcal{C}$).

De plus, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\h>0}} \tau(h) = -\infty$ donc $\mathcal{C}$ admet une tangente verticale dirigée par le bas en 4.

Exercice n°22

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

1. f est-elle continue en 1 ?
2. f est-elle dérivable en 1 ?
3. Justifier que f est dérivable pour tout $x \neq 1$.

Exercice n°23

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & si \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \cos(x) & si \quad 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

1. f est-elle continue en 0 ?
2. f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice n°24

Montrer que l'équation $3x^3-5x+1=0$ admet trois solutions réelles dont on donnera une valeur approchée à 0,001 près.

Exercice n°25

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que $f(0)=1$ et $f(1)=0$.
Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution sur $[0;1]$.

Exercice n°26

On considère la fonction f définie sur $[-2;1]$ par : $f(x) = xe^{-x}+2$.

1. Montrer que $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.
2. En déduire les variations de f.
3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α. Donner alors une valeur approchée de α au centième.

Exercice n°27

On injecte par voie intraveineuse un médicament.
Le taux du produit dans le sang est modélisé par la fonction :

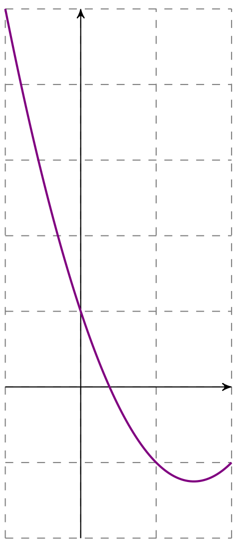
$$f(t) = (1 - 0{,}02t)e^{-0{,}2t} \qquad , \qquad t \in [0;50].$$

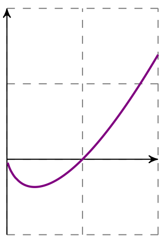
où t représente le temps après injection, exprimé en heures.

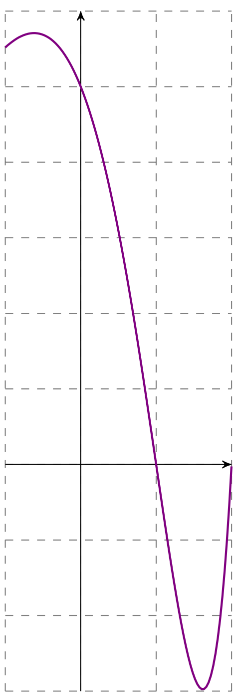
1. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0;50]$.
2. Montrer que l'équation $f(t) = 0{,}5$ admet une unique solution sur $[0;50]$. En Donner alors une valeur approchée au dixième. Interpréter ce résultat.

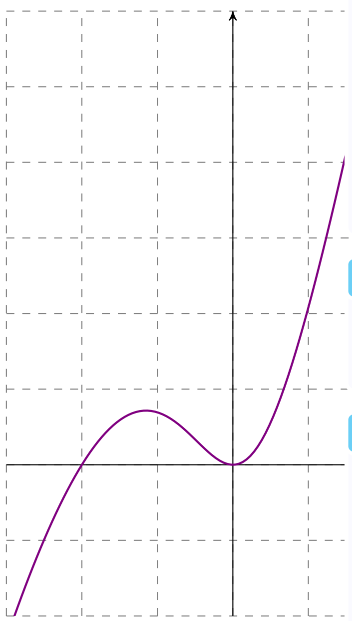
Exercice n°28

Pour chacune des courbes suivantes, étudier la convexité de la fonction correspondante sur l'intervalle où la courbe est tracée.
Préciser, s'il y a lieu, la position des points d'inflexion.

1.


2.


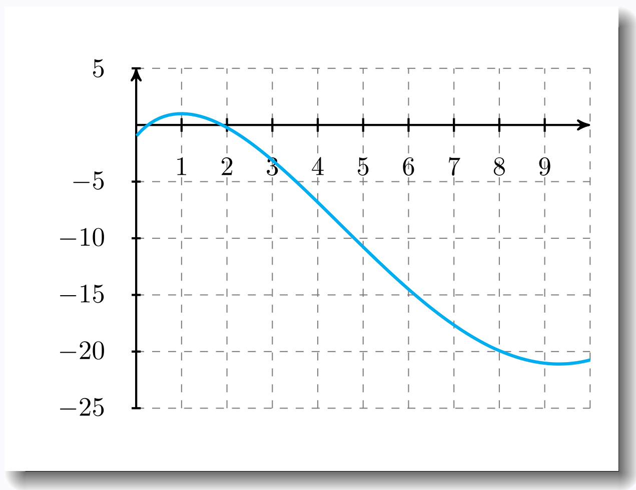
3.


4.


5.


Exercice n°29

On considère une fonction f dont la courbe représentative est la suivante :



Placer approximativement son point d'inflexion et préciser les intervalles où f est concave et convexe.

Exercice n°30

Déterminer la convexité de la fonction f définie par $f(x) = xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°31

ors de la propagation d'une rumeur, le nombre d'individus propageant cette rumeur x jours après son commencement est donné, en unité, par la fonction :

$$f(x) = 100 + x^4 e^{-0{,}1x} \qquad \text{pour } x \in [0;50].$$

1. Déterminer le nombre d'individus propageant cette rumeur initialement.

2. (a) Prouver que $f'(x) = x^3(4 - 0{,}1x)e^{-0{,}1x}$.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0; 50]$.
3. Dans cette question, on admet que la dérivée seconde de f est :

$$f''(x) = x^2 e^{-0{,}1x}\big(0{,}01x^2 - 0{,}8x + 12\big).$$

   Étudier la convexité de la fonction f sur $[0; 50]$.
4. En déduire :
   (a) le nombre de jours qu'il faut attendre avant que le nombre d'individus propageant cette rumeur diminue (arrondi à l'unité) ;
   (b) le nombre maximum d'individus propageant cette rumeur (arrondi à l'unité) ;
   (c) le nombre de jours qu'il faut attendre avant que la croissance du nombre d'individus propageant cette rumeur diminue.

Exercice n°32

La courbe représentative de la fonction f telle que $f''(x) = (x-1)^2 e^x$ admet-elle un point d'inflexion ?

Exercice n°33

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 1}.$$

1. En étudiant la fonction $u : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 1$, déterminer le domaine de définition de $f(x)$.
   On notera α la valeur telle que $u(\alpha) = 0$.
2. Montrer que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse α est verticale.

Exercice n°34

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}.$$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. (a) Montrer que sa dérivée est définie sur $[0; +\infty]$ par :

$$f'(x) = \frac{x + 4\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}\,(2 + \sqrt{x})^2}.$$

   (b) Résoudre l'équation :

$$X^2 + 4X - 1 = 0\ ,$$

   puis en déduire le signe de $f'(x)$ ainsi que les variations de f sur $[0; +\infty[$.
   Dresser alors un tableau de variations complet de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
   On veillera notamment à calculer la valeur de l'extremum de f.