Maths Expertes
maths-mde.fr

Devoir Surveillé n° 3

Corrigé

Lycée
Evariste Galois

Exercice 1 : (3 points)

1 On considère l'égalité : $23 \times 51 + 35 = 1\ 208$.

(a) On a donc : $-23 \times 51 - 35 = -1\ 208$. Or, le reste d'une division eulidienne est toujours positif. On peut alors écrire : $-23 \times 51 - 51 + 16 = -1\ 208$. Autrement dit, $-24 \times 51 + 16 = -1\ 208$.
Ainsi, 16 est le reste de la division eulidienne de $-1\ 208$ par 51.

(b) On a : $23 \times 51 + 35 = 1\ 208$. Donc, $23 \times 51 + 23 + 12 = 1\ 208$. Autrement dit, $23 \times 52 + 12 = 1\ 208$.
Ainsi, 12 est le reste de la division eulidienne de $1\ 208$ par 23.

2 On divise un entier naturel n par 152, puis par 147. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 13 et 98. Soit q ce quotient. Nous avons alors :
$n = 152q + 13 = 147q + 98$. Ainsi, $q = \dfrac{98 - 13}{152 - 147} = \dfrac{85}{5} = 17$.
Par conséquent, $n = 152 \times 17 + 13 = 147 \times 17 + 98 = 2\ 597$.

Exercice 2 : (8 points)

1 $a|b \iff a|(pa + qb)$, où p et q sont deux entiers relatifs.
$pa + qb = (p + 3q)n - (4p + 17q)$ est indépendante de n si $p + 3q = 0$, soit $p = -3q$.
Prenons alors $p = -3$ et $q = 1$:

$$pa + qb = -3a + b = -3(n - 4) + 3n - 17 = -5.$$

Ainsi, $a|5$, dans les cas suivants :
— $a = 1$, ce qui entraîne, $n - 4 = 1$, soit $n = 5$;
— $a = 5$, ce qui entraîne, $n - 4 = 5$, soit $n = 9$;
— $a = -1$, ce qui entraîne, $n - 4 = -1$, soit $n = 3$;
— $a = -5$, ce qui entraîne, $n - 4 = -5$, soit $n = -1$.
Si $n = 5$, $a = 1$ et $b = 2$ et a divise bien b.
Si $n = 9$, $a = 5$ et $b = 10$ et a divise bien b.
Si $n = 3$, $a = -1$ et $b = -8$ et a divise bien b.
Si $n = -1$, $a = -5$ et $b = -20$ et a divise bien b.
Ainsi, les valeurs de n telles que a divise b sont -1, 3, 5 et 9.

2 n est impair, on peut donc l'écrire sous la forme, $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2k + 1)^2 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k \\ &= 4k(k + 1). \end{aligned}$$

k et $k + 1$ sont deux entiers consécutifs donc l'un des deux est pair ; ainsi, leur produit est pair et s'écrit donc $k(k + 1) = 2q$, $q \in \mathbb{N}$.
On a donc : $n^2 - 1 = 4 \times 2q = 8q$, ce qui prouve que $n^2 - 1$ est divisible par 8.

3 Avant tout, remarquons que :

$$n^2 = m^2 + 11 \iff n^2 - m^2 = 11 \iff (n + m)(n - m) = 11.$$

Ainsi, il est nécessaire que $n + m$ ou $n - m$ divise 11. Or, 11 est un nombre premier donc :

$$\begin{cases} n + m = 11 \\ n - m = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} n - m = 11 \\ n + m = 1 \end{cases} . \quad \text{ou} \quad \begin{cases} n + m = -11 \\ n - m = -1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} n - m = -11 \\ n + m = -1. \end{cases}$$

Autrement dit,

$$n = 6 \qquad \text{et} \quad m = 5 \text{ ou } m = -5 \qquad \text{ou bien} \quad n = -6 \qquad \text{et} \quad m = 5 \text{ ou } m = -5.$$

Ainsi, les solutions de l'équation $n^2 = m^2 + 11$ sont les couples $(6;-5)$, $(-6;-5)$, $(-6;5)$, et $(6;5)$.

4 On peut écrire $a = bq + r$ avec $a = 7n + 5$ et $b = 3n + 1$. En effet,

$$7n + 5 = 2(3n + 1) + n + 3 \qquad , \qquad 0 \leqslant n + 3 < 3n + 1.$$

La condition sur le reste $0 \leqslant n + 3 < 3n + 1$ équivaut à écrire que $n > 1$. Donc,
— si $n > 1$ le quotient est égal à 2 et le reste à $n + 3$;
— si $n = 0$, $a = bq + r \iff 5 = 5 \times 1 + 0$ donc dans ce cas, le quotient est égal à 5 et le reste à 0 ;
— si $n = 1$, $a = bq + r \iff 12 = 3 \times 4 + 0$ donc ici, le quotient est égal à 3 et le reste à 0.

5 Pour $n = 0$, $3n + 7 = 7$ et $n + 2 = 2$ sont bien premiers entre eux.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons chercher une combinaison linéaire de $3n + 7$ et $n + 2$ qui est égale à 1 : on regarde les termes en n et on s'aperçoit qu'en multipliant par 3 le deuxième nombre, on a :

$$(3n + 7) - 3(n + 2) = 1.$$

Il existe donc une combinaison linéaire de ces deux nombres qui est égale à 1 ; par conséquent, ils sont premiers entre eux d'après le théorème de Bézout.

6 $x \wedge y = 354 \iff \exists (x';y') \in \mathbb{N}$, $x = 354x'$, $y = 354y'$, $x' \wedge y' = 1$. Ainsi,
$x + y = 5664 \iff 354x' + 354y' = 5664 \iff x' + y' = 16$.
On cherche donc deux entiers x' et y' premiers entre eux dont la somme vaut 16. On peut en faire la liste :
— $(x';y') = (1;15)$
— $(x';y') = (3;13)$
— $(x';y') = (5;11)$
— $(x';y') = (7;9)$
— $(x';y') = (9;7)$
— $(x';y') = (11;5)$
— $(x';y') = (13;3)$
— $(x';y') = (15;1)$.
En multipliant ces valeurs par 354, on obtient tous les couples $(x;y)$:
— $(x;y) = (354;5310)$
— $(x;y) = (1062;4602)$
— $(x;y) = (1770;3894)$
— $(x;y) = (2478;3186)$
— $(x;y) = (3186;2478)$
— $(x;y) = (3894;1770)$
— $(x;y) = (4602;1062)$
— $(x;y) = (5310;354)$.

7 On a :

$$\begin{aligned} 99 &= 1 \times 56 + 43 \\ 56 &= 1 \times 43 + 13 \\ 43 &= 3 \times 13 + 4 \\ 13 &= 3 \times 4 + 1 \\ 4 &= 4 \times 1 + 0. \end{aligned}$$

En « remontant », on a :

$$\begin{aligned}1 &= 13 - 3\times 4\\ &= (56-43) - 3(43 - 3\times 13)\\ &= 56 - 4\times 43 + 9\times 13\\ &= 56 - 4\times(99-56) + 9(56-43)\\ &= 14\times 56 - 4\times 99 - 9\times 43\\ &= 14\times 56 - 4\times 99 - 9(99-56)\\ &= 23\times 56 - 13\times 99.\end{aligned}$$

Il existe donc un couple $(u;v) = (-13;23)$ tel que $99u + 56v = 1$.
Ainsi, d'après le théorème de Bézout, $99 \wedge 56 = 1$.

8 Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}3^{n+p} - 3^{n+1} \text{ est divisible par } p &\iff 3^{n+p} - 3^{n+1} \equiv 0 \mod p\\ &\iff 3^{n+p} \equiv 3^{n+1} \mod p\\ &\iff 3^n \times 3^p \equiv 3^n \times 3 \mod p\\ &\iff 3^p \equiv 3 \mod p \qquad \text{car } p \neq 3.\end{aligned}$$

Cette dernière congruence est vraie d'après le petit théorème de Fermat (car p est premier et p ne divise pas 3).
Par conséquent, pour tout entier naturel n, $3^{n+p} - 3^{n+1}$ est divisible par p.

Exercice 3 : (6 points)

1 Il est évident que : $4^3 = 64$ et 1 est le reste de la division euclidienne de 64 par 7. Donc, $4^3 \equiv 1[7]$.
Par ailleurs, $11 \equiv 4\ [7]$ et $2011 = 3\times 670 + 1$. Ainsi, $\left(11^3\right)^{670} \equiv \left(4^3\right)^{670}\ [7]$ et $\left(4^3\right)^{670} \equiv 1[7]$.
Nous avons alors, par transitivité : $11^{2010} \equiv 1\ [7]$.
Dès lors, par produit, on obtient : $11 \times 11^{2010} \equiv 1\times 4\ [7]$. Autrement dit, $11^{2011} \equiv 4\ [7]$.
Par conséquent, 11^{2011} est congru à 4 modulo 7.

2 Soit un entier naturel n tel que : $n = 10a + b$ avec $a,\ b \in \mathbb{N}$ et $0 \leq b \leq 9$.

(a) 17, 34, 51, 68 et 85 sont les multiples de 17 inférieurs à 100.

(b) $n \equiv 0\ [17] \Leftrightarrow 17 \mid 10a + b$. Et en utilisant le théorème de Gauss, on peut dire que :
$n \equiv 0\ [17] \Leftrightarrow 17 \mid 5(10a+b)$, car $5 \wedge 17 = 1$.
Or, $17 \mid 51a$. Donc, $n \equiv 0\ [17] \Leftrightarrow 17 \mid 51a - a + 5b - 51a$. Autrement dit, $n \equiv 0\ [17] \Leftrightarrow a - 5b \equiv 0\ [17]$.

(c) Critère simple de divisibilité par 17 : Un nombre entier est divisible par 17 si son nombre des dizaines moins 5 fois son nombre des unités est un multiple de 17.

(d) $56 - 5\times 2 = 46$ et 46 n'est pas un multiple de 17. Donc, 652 n'est pas un multiple de 17.
$1\ 547 = 154 - 5\times 7 = 149$ et 149 est un multiple de 17. Donc, 1 547 est un multiple de 17.

Exercice 4 : (3 points)

Soit l'équation (E) : $x^2 - x + 4 \equiv 0[6]$. En faisant les calculs, on obtient :

$x \equiv [6]$	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv [6]$	0	1	4	3	4	1
$-x+4 \equiv [6]$	4	3	2	1	0	-1
$x^2 - x + 4 \equiv [6]$	4	4	6	4	4	0

Ainsi, $x \equiv 2$ [6] ou $x \equiv 5$ [6].