Devoir Surveillé n° 1

...../20

Exercice 1 : (3 points)

Mettre les conjugués des deux nombres complexes suivants sous la forme algébrique.

1 $z_1 = \left(\dfrac{1}{1+i}\right)^2$.

2 $z_2 = \dfrac{1-i}{5+i} + \dfrac{7}{1-i}$.

Exercice 2 : (4 points)

Les trois questions sont indépendantes.

1 Donner la forme algébrique de la somme : $S = \sum_{k=0}^{143} i^k = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{143}$.

2 Donner la forme algébrique de : $(1+i)^5$.

3 Donner une forme algébrique de : $\sqrt{2i+1}$.

4 Résoudre le système suivant, d'inconnues complexes z_1 et z_2 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2z_1 + 3z_2 & = & 5 - 3i \\ z_1 - 3z_2 & = & 4 + 6i \end{array}\right. .$$

Exercice 3 : (2 points)

Soit x un réel et $z = 2x - 1 + i(2x^2 + 5x - 2)$

1 Déterminer la valeur de x pour laquelle z est un imaginaire pur. Que vaut alors z ?

2 Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles z est réel ? Que vaut alors z ?

Exercice 4 : (2,5 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes en donnant la solution sous forme algébrique.

1 $-6z + 3 = iz + 1 - 5i$.

2 $-2iz + \overline{z} - 3 = 7 - \overline{z} + 53i$.

Exercice 5 : (2,5 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes en donnant les solutions sous la forme algébrique.

1 $2z^2 - 3z + 5 = 0$.

2 $z^2 + 3\overline{z} - 1 = 0$.

Exercice 6 : (3 points)

On pose pour tout complexe z : $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

1 Montrer $2i$ est une racine de f.

2 Déterminer les réels a et b tels que : $f(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$.

3 Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation : $f(z) = 0$.

Exercice 7 : (3 points)

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie dans $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{3}z_n + \dfrac{2}{3}i \end{cases}$.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = z_n - i$.

1 Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de (u_n).

2 Déterminer u_n puis z_n en fonction de n.