Devoir Surveillé n° 1

Corrigé

Exercice 1 : (3 points)

La forme algébrique des conjugués.

1

$$\begin{aligned}
\overline{z_1} &= \overline{\left(\frac{1}{1+i}\right)^2} \\
&= \left(\overline{\frac{1}{1+i}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{\overline{1+i}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{1-i}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1+i}{1^2-i^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1^2+2i+i^2}{4} \\
&= \frac{1}{2}i.
\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
\overline{z_2} &= \overline{\frac{1-i}{5+i}} + \overline{\frac{7}{1-i}} \\
&= \frac{\overline{1-i}}{\overline{5+i}} + \frac{7}{\overline{1-i}} \\
&= \frac{1+i}{5-i} + \frac{7}{1+i} \\
&= \frac{(1+i)(5+i)}{26} + \frac{7(1-i)}{2} \\
&= \frac{(1+i)(5+i)}{26} + \frac{13\times 7(1-i)}{26} \\
&= \frac{5+i+5i-1+91-91i}{26} \\
&= \frac{95-85i}{26}.
\end{aligned}$$

Exercice 2 : (4 points)

Les trois questions sont indépendantes.

1 La forme algébrique de la somme :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{143} i^k = 1+i+i^2+\cdots+i^{143} \\
&= \frac{i^{144}-1}{i-1} \\
&= \frac{(i^2)^{72}-1}{i-1} \\
&= \frac{(-1)^{72}-1}{i-1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2 La forme algébrique :

$$\begin{aligned}
(1+i)^5 &= 1^5+5\times 1^4\times i+10\times 1^3\times i^2+10\times 1^2\times i^3+5\times 1\times i^4+i^5 \\
&= 1+5i-10-10i+5+i \\
&= -4-4i.
\end{aligned}$$

3 Posons : $\sqrt{2i+1} = a+ib$, a et b deux réels. Ainsi,

$$\begin{aligned}
2i+1=(a+ib)^2 &\Leftrightarrow 2i+1=a^2-b^2+2abi\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 &= 1\\ 2ab &= 2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 &= 1\\ ab &= 1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 &= 1\\ b &= \dfrac{1}{a}, \text{ avec } a\neq 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\dfrac{1}{a^2} &= 1\\ b &= \dfrac{1}{a} \text{ avec } a\neq 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^4-1 &= a^2\\ b &= \dfrac{1}{a} \text{ avec } a\neq 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^4-a^2-1 &= 0\\ b &= \dfrac{1}{a} \text{ avec } a\neq 0\end{cases}
\end{aligned}$$

Posons $X = a^2$. On obtient alors : $X^2 - X - 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times 1\times(-1) = 5$. Δ étant positif, cette équation admet deux solutions : $X_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Or, $X > 0$. Donc, $a^2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Autrement dit, $a = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ ou $a = -\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.
Par conséquent, $\sqrt{2i+1} = \pm\left(\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}}\right)$.

4 z_1 et z_2 sont deux nombres complexes :

$$\begin{cases} 2z_1+3z_2 = 5-3i & L_1\\ z_1-3z_2 = 4+6i & L_2\end{cases}.$$

$L_1+L_2 \Longrightarrow 3z_1 = 9+3i \Longrightarrow z_1 = 3+i$.
$L_1-2L_2 \Longrightarrow 9z_2 = -3-15i \Longrightarrow z_2 = -\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{3}i$.
Ainsi, $S = \left\{3+i\ ;\ -\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{3}i\right\}$.

Exercice 3 : (2 points)

Soit x un réel et $z = 2x-1+i(2x^2+5x-2)$.

1

$$\begin{aligned}
\text{z est un imaginaire pur} &\Leftrightarrow Re(z)=0\\
&\Leftrightarrow 2x-1=0\\
&\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $z = \left(2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \times \frac{1}{2} - 2\right) i = 1 \times i = i.$

2

$$\begin{aligned} \text{z est réel} &\Leftrightarrow Im(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 2 = 0. \ (E) \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation (E) est égal à : $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 + 16 = 41$.

Δ étant positif, cette équation admet deux solutions : $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{41}}{4}$ et $x_2 = \frac{-5 + \sqrt{41}}{4}$.

Par conséquent, il existe deux valeurs de x pour lesquelles z est un réel :

$z_1 = \frac{-5 - \sqrt{41}}{2} - 1 = \frac{-7 - \sqrt{41}}{2}$ et $z_2 = \frac{-5 + \sqrt{41}}{2} - 1 = \frac{-7 + \sqrt{41}}{2}$.

Exercice 4 : (2,5 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes en donnant la solution sous forme algébrique.

1 Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} -6z + 3 = iz + 1 - 5i &\Leftrightarrow -6z - iz = 1 - 5i - 3 \\ &\Leftrightarrow (-6 - i)z = -5i - 2 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-5i - 2}{-6 - i} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{5i + 2}{6 + i} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{(5i + 2)(6 - i)}{(6 + i)(6 - i)} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{30i + 5 + 12 - 2i}{6^2 - i^2} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{17 + 28i}{37}. \end{aligned}$$

Ainsi, $S = \left\{\frac{17}{37} + \frac{28}{37} i\right\}$.

2 Posons, $z = a + ib$. Ainsi,

$$\begin{aligned} -2i(a + ib) + (a - ib) - 3 = 7 - (a - ib) + 53i &\Leftrightarrow -2ia + 2b + a - ib - 3 = 7 - a + ib + 53i \\ &\Leftrightarrow 2b + 2a - 10 + i(-2a - 2b - 53) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 2a - 10 = 0 & L_1 \\ -2a - 2b - 53 = 0 & L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 2a = 10 & L_1 \\ 2a + 2b = 53 & L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

C'est absurde. Cette équation n'admet pas de solution. Donc, $S = \emptyset$.

Exercice 5 : (2,5 points)

1 Le discriminant de l'équation $2z^2 - 3z + 5 = 0$ est égal à :

$$\begin{array}{rcl} \Delta & = & b^2 - 4ac \\ & = & (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5 \\ & = & 9 - 40 \\ & = & -31. \end{array}$$

Δ étant négatif, cette équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$: $z_1 = \dfrac{3 - i\sqrt{31}}{4}$ et $z_2 = \dfrac{3 + i\sqrt{31}}{4}$.
Ainsi, $S = \left\{ \dfrac{3 - i\sqrt{31}}{4} \ ; \ \dfrac{3 + i\sqrt{31}}{4} \right\}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Posons $z = a + ib$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} z^2 + 3\overline{z} - 1 = 0 & \Leftrightarrow & (a+ib)^2 + 3(a - ib) - 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow & a^2 - b^2 + 2iab + 3a - 3ib - 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow & a^2 - b^2 + 3a - 1 + i(2ab - 3b) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} a^2 - b^2 + 3a - 1 = 0 \\ 2ab - 3b = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} a^2 - b^2 + 3a - 1 = 0 \\ b = 0 \ \text{ ou } \ 2a - 3 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} a^2 - b^2 + 3a - 1 = 0 \\ b = 0 \ \text{ ou } \ a = \dfrac{3}{2} \end{cases} \end{array}$$

Si $b = 0$, alors $a^2 + 3a - 1 = 0 \ \ (*)$. Le discrimiant de l'équation $(*)$ est égal à :

$$\begin{array}{rcl} \Delta & = & b^2 - 4ac \\ & = & (3)^2 - 4 \times 1 \times (-1) \\ & = & 9 + 4 \\ & = & 13. \end{array}$$

Ainsi, $a_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{13}}{2}$ et $a_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{13}}{2}$.
Si $a = \dfrac{3}{2}$ alors $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - b^2 + 3 \times \dfrac{3}{2} - 1 = 0$. Ce qui implique que : $b^2 = \dfrac{9}{4} + \dfrac{9}{2} - 1 = \dfrac{23}{4}$. Autrement dit, $b = \dfrac{\sqrt{23}}{2}$ ou $b = -\dfrac{\sqrt{23}}{2}$.
Par conséquent, $S = \left\{ \dfrac{-3 - \sqrt{13}}{2} \ ; \ \dfrac{-3 + \sqrt{13}}{2} \ ; \ \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{23}}{2} i \ ; \ \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{23}}{2} i \right\}$.

Exercice 6 : (3 points)

On pose pour tout complexe z : $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $2i$ est une racine de f. En effet,

$$\begin{array}{rcl} f(2i) & = & (2i)^3 - 2(\sqrt{3} + i) \times (2i)^2 + 4(1 + i\sqrt{3}) \times 2i - 8i \\ & = & -8i + 8(\sqrt{3} + i) + 8i(1 + i\sqrt{3}) - 8i \\ & = & -8i + 8\sqrt{3} + 8i + 8i - 8\sqrt{3} - 8i \\ & = & 0. \end{array}$$

2 Soit a et b deux réels :

$$\begin{array}{rcl} f(z) & = & (z-2i)(z^2+az+b) \\ & = & z^3+az^2+bz-2iz^2-2iaz-2ib \\ & = & z^3+(a-2i)z^2+(b-2ia)z-2ib \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} a-2i=-2(\sqrt{3}+i) \\ b-2ia=4(1+i\sqrt{3}) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=-2\sqrt{3} \\ b=4 \end{cases}.$$

3 Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{array}{rcl} f(z)=0 & \Leftrightarrow & (z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0 \\ & \Leftrightarrow & z=2i \ \text{ ou } \ z^2-2\sqrt{3}z+4=0. \ (E) \end{array}$$

Le discriminant de l'équation (E) est égal à :

$$\Delta = b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times 1\times 4=4\times 3-4\times 1\times 4=-4.$$

Δ étant négatif, l'équation (E) admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1=\frac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i \quad \text{et} \quad z_2=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i.$$

Ainsi, $S=\left\{2i \ ; \ \sqrt{3}-i \ ; \ \sqrt{3}+i\right\}$.

Exercice 7 : (3 points)

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie dans $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} z_0=1 \\ z_{n+1}=\dfrac{1}{3}z_n+\dfrac{2}{3}i \end{cases}$.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n=z_n-i$.

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & z_{n+1}-i \\ & = & \dfrac{1}{3}z_n+\dfrac{2}{3}i-i \\ & = & \dfrac{1}{3}z_n-\dfrac{1}{3}i \\ & = & \dfrac{1}{3}(z_n-i) \\ & = & \dfrac{1}{3}u_n. \end{array}$$

Ce qui implique que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{3}$. Autrement dit, (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

2 La suite (u_n) étant géométrique, nous pouvons alors l'écrire sous la forme :

$$u_n=u_0\left(\frac{1}{3}\right)^n=(1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Dès lors,

$$z_n=u_n+i=(1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^n+i.$$