Devoir Maison n°3

Exercice 1 : (3 points)

La transformée de Fourier discrète est un outil mathématique utilisé en traitement du signal. On pose $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ avec $n \geqslant 2$ et on considère une séquence de n nombres complexes $(x_0; x_1; \cdots; x_{n-1})$. La transformée de Fourier discrète de $(x_0; x_1; \cdots; x_{n-1})$ est $(X_0; X_1; \cdots; X_{n-1})$ avec

$$X_l = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \times w^{-kl} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant l \leqslant n-1.$$

1. Premier cas particulier : $n = 2$. Déterminer la transformée de Fourier de $(x_0; x_1)$.
2. Deuxième cas particulier : $n = 3$.
   (a) Déterminer la transformée de Fourier de $(x_0; x_1; x_2)$.
   (b) En déduire la transformée de Fourier de $(1; 0; 1)$.

Exercice 2 : (7 points)

1. (a) Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\quad (1 - z)\left(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}\right) = 1 - z^n$.
   (b) En déduire que $z^n = 1$ si, et seulement si, $z = 1$ ou $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0$.
2. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.
   (a) Vérifier que $\omega^5 = 1$, puis que $\omega^4 = \overline{\omega}$ et $\omega^3 = \overline{\omega}^2$.
   (b) On pose $u = \omega + \omega^4$ et $v = \omega^2 + \omega^3$. Montrer que $u + v = uv = -1$.
   (c) Déterminer une équation du second degré dont u et v sont les deux solutions.
   (d) En déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{2\pi}{5}$ et $\cos \dfrac{4\pi}{5}$.
3. Soit A_p le point d'affixe ω^p avec p un entier naturel.
   (a) Montrer que $A_p = A_{p+5}$. Quelles sont les coordonnées de A_1 ?
   (b) Pour tout p, calculer OA_p, puis A_pA_{p+1}.
   On dit alors que le pentagone $A_0A_1A_2A_3A_4$ est un pentagone régulier.