

Devoir Maison n°3

Exercice 1 : (6 points)

Soit p un nombre premier impair. On considère dans \mathbb{Z} l'équation $(E) : x^2 \equiv 2 [p]$.

1. (a) Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1 [p]$.
 (b) En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p]$.
 (On remarque que : $(2^{\frac{p-1}{2}} - 1)(2^{\frac{p-1}{2}} + 1) = 2^{p-1} - 1$.)
2. Soit x une solution de l'équation (E) .
 (a) Montrer que p et x sont premiers entre eux.
 (b) En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$. (On pourra utiliser le théorème de Fermat).
3. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, p divise $\binom{k}{p}$.
4. (a) En utilisant la formule de Moivre, montrer que :

$$(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) + i2^{\frac{p}{2}} \sin\left(\frac{p\pi}{4}\right)$$

avec, i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

(b) On admet que : $(1+i)^p = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k \binom{2k}{p} + i \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k \binom{2k+1}{p}$.

Montrer que : $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$ et $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) \equiv 1 [p]$.

5. En déduire que si $p \equiv 5 [8]$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution dans \mathbb{Z} .

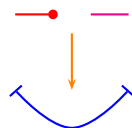
Exercice 2 : (4 points)

Tout entier naturel a s'écrit sous la forme :

$$a = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0,$$

avec pour tout i , $a_i \in \mathbb{N}$ et $a_i < 10$. Cette écriture en base de 10, est souvent notée comme suit $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$. Démontrer les propriétés suivantes.

1. $a \equiv a_0 [2]$.
2. $a \equiv \sum_{i=0}^n a_i [3]$.
3. $a \equiv 10 \times a_1 + a_0 [4]$.
4. $a \equiv a_0 [5]$.
5. $a \equiv \sum_{i=0}^n a_i [9]$.



Bon courage!