Devoir Maison n°3

Exercice 1 : (6 points)

Soit p un nombre premier impair. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^2 \equiv 2\ [p]$.

1. (a) Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

   (b) Nous avons, en effet, l'égalité suivante : $\left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right) = \left(2^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 - 1 = 2^{p-1}-1$.

   Or, p est impair donc $p-1$ est pair et $\dfrac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} 2^{p-1} \equiv 1\ [p] &\Leftrightarrow 2^{p-1}-1 \equiv 0\ [p] \\ &\Leftrightarrow \left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right) \equiv 0\ [p] \\ &\Leftrightarrow p \mid \left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right) \\ &\Leftrightarrow p \mid \left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right) \quad \text{ou} \quad p \mid \left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right) \\ &\Leftrightarrow 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ [p] \quad \text{ou} \quad 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1\ [p]. \end{aligned}$$

2. Soit x une solution de l'équation (E).

   (a) Raisonnement par l'absurde : Supposons que p divise x. Cela implique que p divise x^2. Or, x est une solution de l'équation (E). Autrement dit, $x^2 \equiv 2\ [p]$. Ce qui revient à dire que $p \mid x^2-2$. D'où, $p \mid x^2-(x^2-2)$, soit $p \mid 2$. Ce dernier résultat est contradictoire avec le fait que p est impair.

   Ainsi, x n'est pas divisible par p. Par ailleurs, p est premier donc 1 est le seul diviseur commun de a et x. Par conséquent, $p \wedge x = 1$.

   (b) Nous savons que p est premier et que $p \wedge x = 1$, donc d'après le petit théorème de Fermat : $x^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

   Or, $x^2 \equiv 2\ [p]$ et $\dfrac{p-1}{2} \in \mathbf{N}$, donc $(x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}}\ [p]$. D'où, $x^{p-1} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}}\ [p]$.

   Par transitivité, on déduit que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$.

3. Pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$, on a :

$$\begin{aligned} \binom{p}{k} &= \frac{p!}{k!(p-k)!} \\ &= \frac{p(p-1)!}{k(k-1)!(p-1-(k-1))!} \\ &= \frac{p}{k}\binom{k-1}{p-1}. \end{aligned}$$

   Ainsi, $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$. D'où, $p \mid k\binom{p}{k}$. Par ailleurs, $p \wedge k = 1$, donc d'après le théorème de Gauss p divise $\binom{p}{k}$.

4. (a) En utilisant la formule de Moivre, on obtient :

$$(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^p = 2^{\frac{p}{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^p = 2^{\frac{p}{2}}\cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) + i2^{\frac{p}{2}}\sin\left(\frac{p\pi}{4}\right).$$

Exercice 2 : (suite)

4. (b) On admet que : $(1+i)^p = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k \binom{p}{2k} + i \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k \binom{p}{2k+1}$.
En identifiant la partie réelle de la susdite égalité avec celle du résultat obtenu dans la question précédente, on obtient :
$2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k \binom{p}{2k}$.
Or, $(-1)^k \in \mathbb{Z}$ et $\binom{p}{2k} \in \mathbb{N}$, donc $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$.
Par ailleurs, pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$, $p \mid \binom{p}{k}$, et cela implique que pour tout $k \in \left\{1, 2, \cdots, \frac{p-1}{2}\right\}$, $p \mid \binom{p}{2k}$.
On déduit alors que : $p \mid \sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k \binom{p}{2k}$. Autrement dit, $\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k \binom{p}{2k} \equiv 0\ [p]$.
D'où, $(-1)^0 \binom{p}{0} + \sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k \binom{p}{2k} \equiv\ 1\ [p]$, car $(-1)^0 \binom{0}{p} = 1$.
Par conséquent, $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) \equiv 1\ [p]$.

5. Supposons que x est une solution de l'équation (E) quand $p \equiv 5\ [8]$.
Or, $p \equiv 5\ [8] \Leftrightarrow 8 \mid p-5 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : p = 8k+5$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) \equiv 1\ [p] \quad &\Leftrightarrow \quad 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{(8k+5)\pi}{4}\right) \equiv 1\ [p] \\
&\Leftrightarrow \quad 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi\right) \equiv 1\ [p] \\
&\Leftrightarrow \quad 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) \equiv 1\ [p] \\
&\Leftrightarrow \quad 2^{\frac{p}{2}} \times \frac{-\sqrt{2}}{2} \equiv 1\ [p] \\
&\Leftrightarrow \quad -2^{\frac{p}{2}-1+\dfrac{1}{2}} \equiv 1\ [p] \\
&\Leftrightarrow \quad -2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ [p] \\
&\Leftrightarrow \quad 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1\ [p]
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1\ [p]$. Par transitivité, on obtient, $1 \equiv -1\ [p]$. Autrement dit, $2 \mid p$. C'est contradictoire avec le fait que p est impair.
Par conséquent, l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$ dans le cas où $p \equiv 5\ [8]$.

Exercice 2 : (4 points)

Tout entier naturel a s'écrit sous la forme : $a = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$, avec pour tout i, $a_i \in \mathbb{N}$ et $a_i < 10$. Cette écriture en base de 10, est souvent notée comme suit $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$.

1. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 \mid 10^n$. Autrement dit, $10^n \equiv 0\ [2]$.
Ainsi, $a_i \times 10^i \equiv 0\ [2]$, avec $a_i \in \mathbf{N}$ et $1 \leqslant i \leqslant n$.
Par addition, on obtient, $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 \equiv 0\ [2]$. Par conséquent,

$$a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 \equiv a_0\ [2].$$

Exercice 2 : (suite)

2. Il est assez aisé de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3 \mid 10^n - 1$. En effet,
$10^n - 1 = (10-1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 1) = 9(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 1)$. Or, $3 \mid 9$ donc $3 \mid 9(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 1)$. D'où le résultat.
Nous avons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $10^n - 1 \equiv 0\ [3]$. Par multiplication, on obtient :
$a_i \times (10^i - 1) \equiv 0\ [3]$, avec $a_i \in \mathbf{N}$ et $1 \leqslant i \leqslant n$.
Et par addition, on obtient : $a_n \times (10^n - 1) + a_{n-1} \times (10^{n-1} - 1) + \cdots a_1 \times (10 - 1) \equiv 0\ [3]$,
Par ailleurs,
$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 = a_n\,(10^n - 1) + a_{n-1}\,(10^{n-1} - 1) + \cdots + a_1\,(10-1) + a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$.
Ainsi, $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i\ [3]$. Autrement dit, $a \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i\ [3]$.
3. Il est évident que pour tout $n \geqslant 2$, $4 \mid 10^n$, car $4 \mid 100$. Ainsi, $10^n \equiv 0\ [4]$, pour tout $n \geqslant 2$.
Ce qui implique que, $a_i \times 10^i \equiv 0\ [4]$, avec $a_i \in \mathbf{N}$ et $2 \leqslant i \leqslant n$.
On obtient alors par addition, $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_2 \times 10^2 \equiv 0\ [4]$. Par conséquent, $a \equiv 10 \times a_1 + a_0\ [4]$.
4. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $5 \mid 10^n$. Autrement dit, $10^n \equiv 0\ [5]$.
Ainsi, $a_i \times 10^i \equiv 0\ [5]$, avec $a_i \in \mathbf{N}$ et $1 \leqslant i \leqslant n$.
Par addition, on obtient, $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 \equiv 0\ [5]$. Par conséquent,
$$a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 \equiv a_0\ [5].$$
Autrement dit, $a \equiv a_0\ [5]$.
5. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $9 \mid 10^n - 1$. En effet,
$10^n - 1 = (10-1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 1) = 9(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 1)$. D'où le résultat.
Nous avons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $10^n - 1 \equiv 0\ [9]$. Par multiplication, on obtient :
$a_i \times (10^i - 1) \equiv 0\ [9]$, avec $a_i \in \mathbf{N}$ et $1 \leqslant i \leqslant n$.
Et par addition, on obtient : $a_n \times (10^n - 1) + a_{n-1} \times (10^{n-1} - 1) + \cdots a_1 \times (10 - 1) \equiv 0\ [9]$,
Par ailleurs,
$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 = a_n\,(10^n - 1) + a_{n-1}\,(10^{n-1} - 1) + \cdots + a_1\,(10-1) + a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$.
Ainsi, $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i\ [9]$. Autrement dit, $a \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i\ [9]$.