Corrigé : Devoir Maison n°2

Exercice 1 : (2 points)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En développant, on obtient :

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 &= \frac{e^{2i\theta}+2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-2i\theta}}{2^2}+\frac{e^{2i\theta}-2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-2i\theta}}{(2i)^2}\\ &= \frac{e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}}{4}-\frac{e^{2i\theta}-2+e^{-2i\theta}}{4}\\ &= \frac{e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}-e^{2i\theta}+2-e^{-2i\theta}}{4}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Ce résultat est bien évidemment prévisible. En effet, en utilisant les formules d'Euler et le théorème de Pythagore, on l'obtient. En effet,

$$\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1.$$

Exercice 2 : (4 points)

Soit p et q deux nombres réels.

a) Pour tous réels p et q, on peut écrire : $p=\frac{p+q}{2}+\frac{p-q}{2}$ et $q=\frac{p+q}{2}-\frac{p-q}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}e^{ip}+e^{iq} &= e^{i\frac{p+q}{2}+i\frac{p-q}{2}}+e^{i\frac{p+q}{2}-i\frac{p-q}{2}}\\ &= e^{i\frac{p+q}{2}}e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{i\frac{p+q}{2}}e^{-i\frac{p-q}{2}}\\ &= e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}}\right).\end{aligned}$$

b) En utilisant la formule d'Euler et la forme trigonométrique, on obtient :

$$\begin{aligned}& e^{ip}+e^{iq}=e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)\\ \Leftrightarrow\ & \cos(p)+i\sin(p)+\cos(q)+\sin(q)=2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \Leftrightarrow\ & \cos(p)+\cos(q)+i\left(\sin(p)+\sin(q)\right)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)+2i\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).\end{aligned}$$

L'unicité de l'écriture d'un nombre complexe entraine :
$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et $\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

c) En utilisant le résultat de la question précédente, on peut dire que :

$$\begin{aligned}\cos(x)+\cos(3x)=0 &\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)=0\\ &\Leftrightarrow 2\cos(2x)\cos(x)=0\\ &\Leftrightarrow \cos(2x)=0 \ \text{ ou } \ \cos(x)=0\\ &\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2} \ \text{ ou } \ 2x=-\frac{\pi}{2} \ \text{ ou } \ x=\frac{\pi}{2} \ \text{ ou } \ x=-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, $S=\left\{-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right\}$

Exercice 3 : (4 points)

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i$.

1. En remplaçant z par i, on obtient :

$$\begin{aligned} P(i) &= i^3 - (2+i)i^2 + 2(1+i)i - 2i \\ &= -i + (2+i) + 2i - 2 - 2i \\ &= +2 + 3i - 2 - 3i \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Ainsi, 0 est une racine de ce polynôme.

2. En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} P(z) &= (z-i)(z^2 + pz + q) \\ &= z^3 + pz^2 + qz - iz^2 - ipz - iq \\ &= z^3 + (p-i)z^2 + (q - ip)z - iq. \end{aligned}$$

   L'identification des coefficients, entraine :

$$\begin{cases} p - i &= -(2+i) \\ q - ip &= 2(1+i) \\ -iq &= -2i \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} p = -2 \\ q = 2 \end{cases} .$$

   Ainsi, $P(z) = (z-i)(z^2 - 2z + 2)$.

3. Le discriminant du polynôme $z^2 - 2z + 2$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = (2i)^2$.

   Ainsi, ses deux racines sont égales à : $z_1 = \dfrac{2-2i}{2} = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i$.

   Par conséquent, les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont i, $1-i$ et $1+i$.