



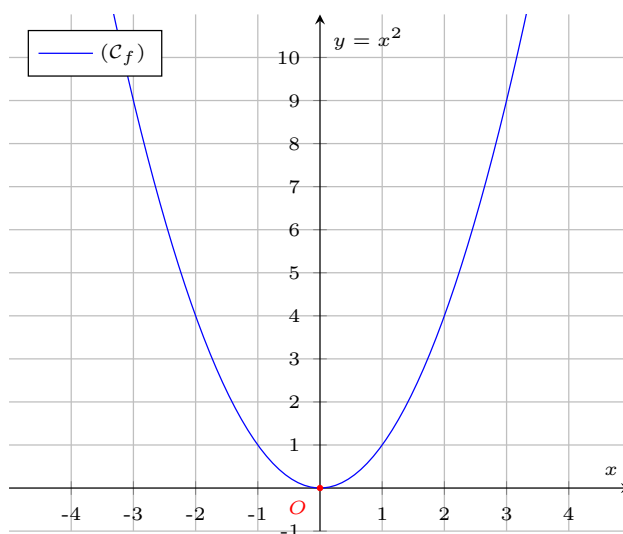
Modélisation quadratique - Fonction polynôme de degré 2

Cours, méthodes et exercices d'entraînement

1 La fonction carré

Définition

On appelle fonction carré, la fonction qui à un nombre réel associe son carré. En d'autres termes, la fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.



2 Équation de la forme $x^2 = a$

Propriété

Les solutions de l'équation $x^2 = a$, avec $a > 0$, sont :

$$-\sqrt{a} \text{ et } \sqrt{a}.$$

Si a est négatif l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exemples

1. Résolution de l'équation $x^2 = 4$.

.....
.....

2. Résolution de l'équation $x^2 = -3$.



3. Résolution de $(x - 3)^2 = 25$.

3 Fonctions polynômes du second degré $x \rightarrow ax^2$ et $x \rightarrow ax^2 + b$

Définition

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \rightarrow ax^2$ et $x \rightarrow ax^2 + b$, avec a et b des réels et $a \neq 0$, sont des fonctions polynômes du second degré.

Leur représentation graphique s'appelle une parabole, elle est tournée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$.

Exemples

Le cas, $f(x) = ax^2$ avec $a \neq 0$.

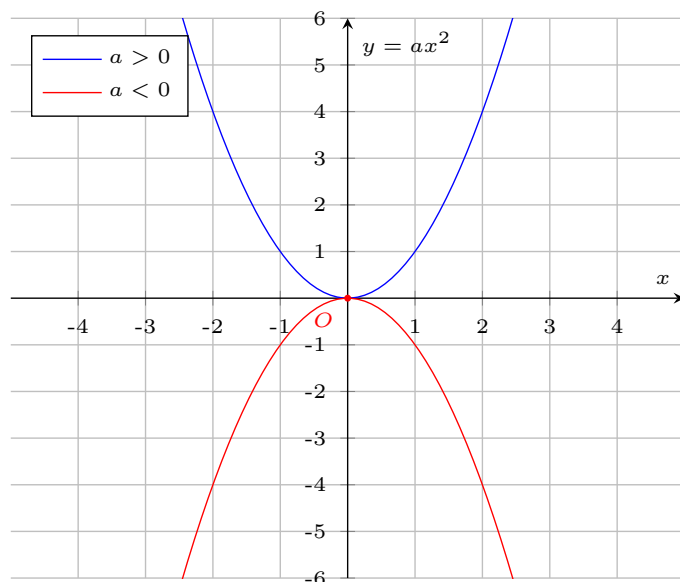


Tableau de variations : $a > 0$.

x	$-\infty$	$\dots$	$+\infty$
$f(x)$			

Tableau de variations : $a < 0$.

x	$-\infty$	$\dots$	$+\infty$
$f(x)$			

Le cas : $f(x) = ax^2 + b$, avec $a \neq 0$.

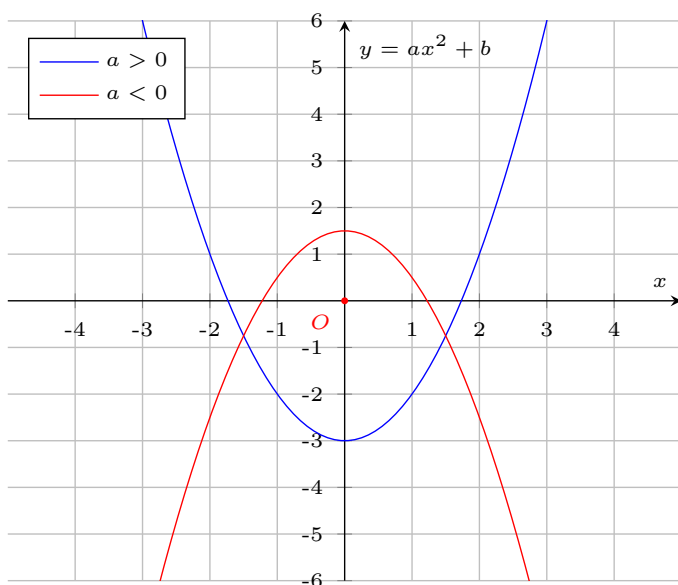


Tableau de variations : $a > 0$.

x	$-\infty$	$\dots$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\dots$	$\nearrow$

Tableau de variations : $a < 0$.

x	$-\infty$	$\dots$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dots$	$\searrow$

Propriété

Dans un repère orthogonal, toute fonction polynôme du second degré est représentée par une parabole $\mathcal{P}$.

La parabole $\mathcal{P}$ admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées (Oy).

Le point d'intersection de la parabole $\mathcal{P}$ et de l'axe (Oy) est appelé sommet de la parabole. Il est noté S . Il a pour coordonnées $S(0; b)$.

Exercice 1

Les fonctions ci-dessous sont définies sur $\mathbb{R}$.

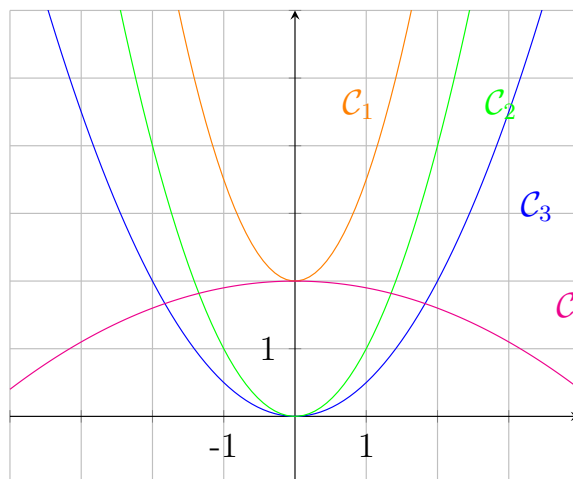
1. $f(x) = 0,5x^2$.

3. $g(x) = 1,5x^2 + 2$.

2. $h(x) = x^2$.

4. $k(x) = -0,1x^2 + 2$.

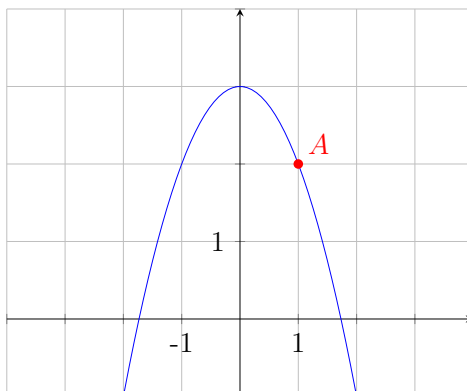
Associer chacune des courbes ci-dessous aux fonctions données.



**Exercice 2**

On donne ci-dessous la parabole $\mathcal{P}$ représentant une fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = ax^2 + b.$$



Déterminer les valeurs de a et b et en déduire l'expression de la fonction f .

.....

.....

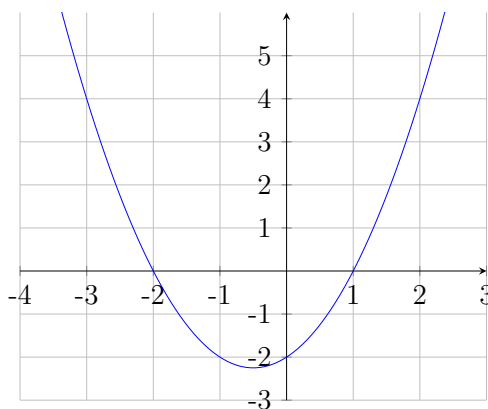
.....

.....

Exercice 3

On considère la fonction polynôme du second degré définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x - 2$.

1. (a) Montrer que 1 et (-2) sont deux racines de f
 -
 - (b) Que peut-on en déduire graphiquement ?
 -
2. On a tracé ci-dessous la parabole représentant f .



- (a) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = 4$
- (b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) < 0$



4 Fonctions polynômes de degré 2 de la forme $x \rightarrow a(x - x_1)(x - x_2)$

Propriété

Dans un repère orthogonal, toute fonction du type $x \rightarrow a(x - x_1)(x - x_2)$ est représentée par une parabole qui admet pour sommet le point S d'abscisse $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$ et pour axe de symétrie la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

Exemples

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2(x + 1)(x - 2)$.

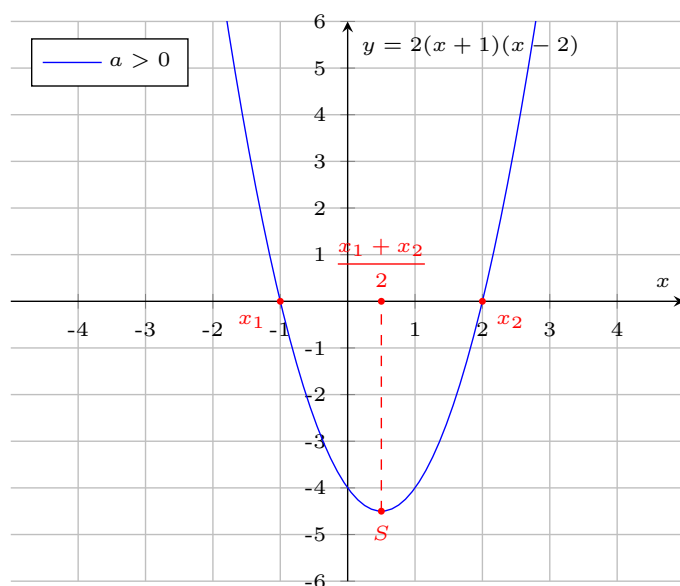


Tableau de variations

x	$-\infty$	$\dots$	$+\infty$
$f(x)$			

On considère la fonction f définie par $f(x) = -2(x - 1)(x + 2)$.

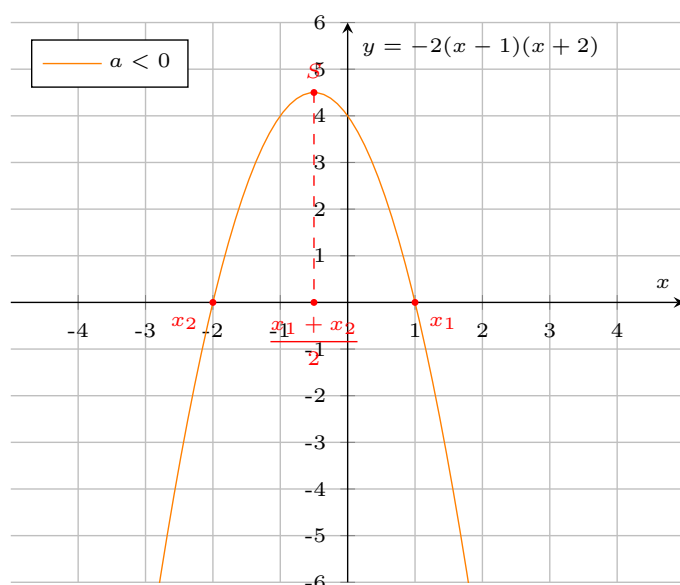


Tableau de variations

x	$-\infty$	$\dots$	$+\infty$
$f(x)$			

- x_1 et x_2 sont les racines du polynôme. Ce sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.



- Le nombre α est la moyenne des racines x_1 et x_2 .

5 Signe d'une fonction polynôme du second degré

Propriété

Pour étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré de la forme

$$x \longrightarrow a(x - x_1)(x - x_2),$$

on étudie le signe de chacun des trois facteurs et on dresse un tableau de signes.

Exemple

Signe de $h(x) = f(x)g(x) = (4x - 8)(9 - 3x)$.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$f(x)$		0		
$g(x)$			0	
$h(x)$		0	0	

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

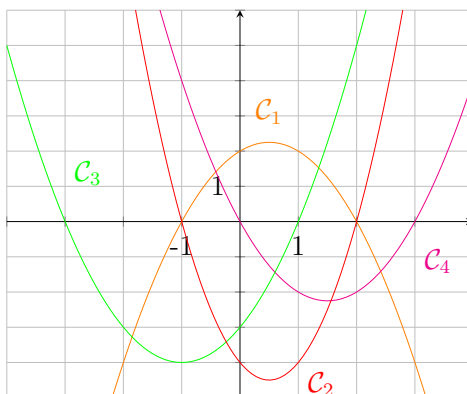
.....

Exercice 4

Les fonctions ci-dessous sont définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = -(x - 2)(x + 1)$
2. $g(x) = x(x - 3)$
3. $h(x) = (x + 3)(x - 1)$
4. $k(x) = 2(x - 2)(x + 1)$

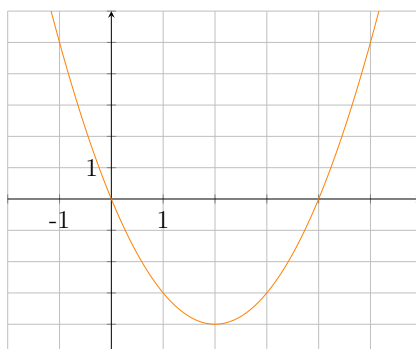
Associer chacune des courbes ci-dessous aux fonctions données.



Exercice 5

On a représenté ci-dessous une fonction polynôme du second degré dont l'expression est :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$



1. Quel est le signe de a ?

.....

2. Quelles sont les valeurs de x_1 et x_2 ?

.....

3. Déterminer la valeur de a sachant que le minimum de la fonction f vaut -4 .

.....
.....
.....
.....