Série d'exercices

Corrigés Classe : 1re SPE Lycée : Evariste Galois

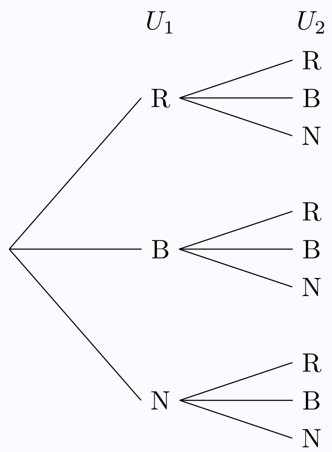
Exercice n°1

On considère un jeu où deux urnes U_1 et U_2 sont remplies de 12 boules.
Dans U_1, il y a 8 boules rouges, 3 boules blanches et 1 boule noire.
Dans U_2, il y a 1 boule rouge, 8 boules blanches et 3 boules noires.
Le joueur tire au hasard une boule dans U_1, puis une autre dans U_2.
On note :

- R l'événement : « la boule tirée est rouge » ;
- B l'événement : « la boule tirée est blanche » ;
- N l'événement : « la boule tirée est noire ».

Si les deux boules tirées sont de la même couleur, le joueur gagne 10 € ; sinon, il ne gagne rien.
Pour jouer, on doit s'acquitter d'une somme de 5 €.
On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1. Compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. Déterminer la loi de probabilités de X.
3. Calculer l'espérance mathématique de X, puis interpréter ce résultat.
4. Calculer la variance puis l'écart-type de X.

Exercice n°2

On dispose d'un dé cubique, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et d'un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). Ces dés sont parfaitement équilibrés.
On lance ces deux dés et on s'intéresse à la somme des deux chiffres obtenus.
Soit X la variable aléatoire représentant l'ensemble des sommes possibles.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique de X.
3. Calculer l'écart-type de X.

Exercice n°3

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie.

1. Si on obtient trois fois « pile » ou trois fois « face », on gagne 100 €. Sinon, on perd 10 € (ce qui correspond à un gain de -10 €).
   Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire représentant le gain algébrique de ce jeu.
2. On ajoute 5 € aux gains. Quelle est alors l'espérance et quel est l'écart-type de la nouvelle variable aléatoire représentant le gain algébrique du jeu ?
3. On multiplie par 2 les gains du jeu initial. Calculer alors l'espérance et l'écart-type de la nouvelle variable aléatoire représentant le gain algébrique du jeu.

Exercice n°4

On lance 3 pièces bien équilibrées valant respectivement 1 €, 2 € et 2 €.
On veut étudier la variable aléatoire X qui totalise le montant en euros des pièces tombées sur « Pile ».

1. Représenter l'expérience par un arbre pondéré.
2. Quelles sont les différentes valeurs possibles pour X ? Donner la loi de probabilité de X.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat supérieur ou égal à 3 € ?

Exercice n°5

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
Dans U_1, il y a n boules noires et 10 boules blanches.
Dans U_2, il y a 10 boules noires et $n+1$ boules blanches.

On tire au hasard une boule dans chaque urne.

1. Exprimer en fonction de n la probabilité de tirer deux boules de même couleur.
2. Pour quelle valeur de n cette probabilité est maximale ?

Exercice n°6

Pour une mise de 0,50 €, on lance un dé cubique équilibré. Tout résultat pair fait gagner le nombre d'euros indiqué sur le dé et tout résultat impair fait perdre le nombre d'euros indiqué sur le dé. Par exemple, obtenir 2 permet de gagner 2 € mais obtenir 3 fait perdre 3 €.
On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique (en tenant compte de la mise).

1. Établir la loi de probabilité de X.
2. Le jeu est-il équitable ? Justifier.

Exercice n°7

Voici trois lois de probabilité ainsi que trois couples (espérance; écart-type).

X	8	14
$p(X)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y	8	12
$p(Y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Z	4	10	16
$p(Z)$	$\dfrac{1}{100}$	$\dfrac{98}{100}$	$\dfrac{1}{100}$

couple 1 : $(11; 1{,}73)$ couple 2 : $(10; 0{,}82)$ couple 3 : $(10; 2{,}83)$
Sans effectuer de calculs, associer chaque couple à sa variable aléatoire.

Exercice n°8

Dans une fête foraine, pour une mise initiale de 3 €, le joueur est invité à lancer deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6.

- Si le résultat est un « double », le joueur empoche le montant en euros égal à la somme des points obtenus.
- Si un seul 6 apparaît, le joueur gagne le montant en euros indiqué sur l'autre dé.
- Dans les autres cas, la partie est perdue.

On désigne par G la variable aléatoire définie par le « gain » du joueur (gain qui peut être négatif).

1. Déterminer la loi de probabilité de G.
2. Calculer l'espérance mathématique de G. Le jeu est-il équitable ?
3. Calculer l'écart-type de G. Interpréter le résultat.

Exercice n°9

Voici la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

X	50	100	200	500
$p(X = x_i)$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{3}{10}$

On souhaite modifier les valeurs de X, tout en conservant les mêmes probabilités, afin que son espérance soit égale à 0 et son écart-type égal à 1.
Proposer les valeurs de la nouvelle variable aléatoire.
Pour cela, on s'aidera des formules suivantes :

$$E(aX+b) = aE(X)+b \quad ; \quad \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X).$$

Exercice n°10

On dispose d'une urne contenant 1 boule noire, 1 boule rouge, 2 boules jaunes et 3 boules bleues.
Un jeu consiste à effectuer deux tirages successifs sans remise dans cette urne.

- quand on tire une boule noire au 1^{er} ou 2^{nd} tirage, on ne gagne rien ;
- quand on tire une boule bleue au 2^{nd} tirage, on gagne 1 € ;
- quand on tire une boule jaune au 2^{nd} tirage, on gagne 5 € ;
- quand on tire une boule rouge au 2^{nd} tirage, on gagne 10 €.

Pour avoir le droit de participer, un joueur doit miser 3 €.
On appelle X la variable aléatoire représentant le gain algébrique de ce jeu.

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
2. Donner la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance mathématique de X. Quelle conclusion peut-on alors faire ?
4. À la vue de la dernière conclusion, déterminer la mise de départ afin que le jeu soit équitable.
5. La mise de départ trouvée à la question précédente ne satisfaisant pas à l'organisateur du jeu, celui-ci souhaite modifier les règles du jeu. Il se demande s'il peut trouver une mise de départ pour laquelle le jeu serait équitable s'il multiplie tous les gains absolus (donc sans tenir compte de la mise de départ) par un entier a non nul.

   On pose Y la variable aléatoire représentant les gains algébriques de ce jeu avec les nouvelles règles. On note m la mise de départ.

   (a) Expliquer pourquoi $\text{Y} = a\text{X} + 3a - m$.

   (b) Donner alors une réponse à la question de l'organisateur.

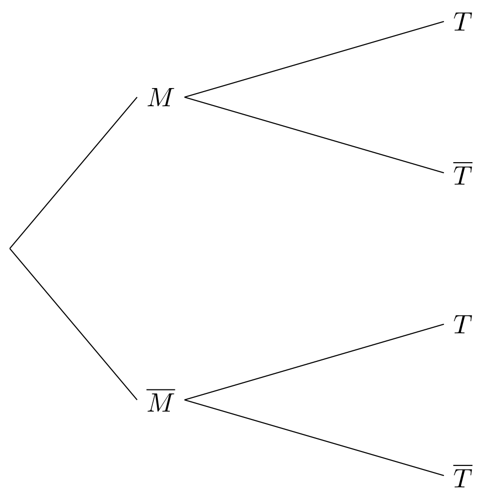
Exercice n°11

Une maladie touche 20% de la population d'une ville.
Lors d'un dépistage de la maladie, on utilise un test biologique vendu par une entreprise qui a les caractéristiques suivantes :

- lorsque la personne est malade, la probabilité d'avoir un test positif est 0,85 ;
- lorsque la personne n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,95.

On choisit une personne au hasard dans cette population.
On note T l'événement « la personne a un test positif à cette maladie »et M l'événement « la personne est atteinte de cette maladie ».

1. Complétez l'arbre page suivante.



2. Calculer $P(M \cap T)$.
3. Montrer que $P(T) = 0{,}21$.
4. On appelle *valeur prédictive positive* du test la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif. On estime que ce test est efficace pour une population donnée lorsque cette probabilité est supérieure à 0,95.

   Ce test est-il efficace sur la population étudiée ?
5. Le test est vendu 5 €. Si le test ne correspond pas à l'état de la personne l'utilisant, il est intégralement remboursé ; sinon, il ne l'est pas.

Calculer la recette moyenne d’un test pour l’entreprise le commercialisant.