Série d'exercices

Corrigés — Classe : 1re SPE — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Dans chacun des cas suivants, dire si la suite (u_n) est définie par sa *relation de récurrence* ou par sa *formule explicite*. Donner ensuite les valeurs des 4 premiers termes.

1. $u_n = 2n^2 - 3n + 1$ pour tout entier naturel n.
2. $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 1 \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$

Exercice n°2

Étudier le sens de variation des suites (u_n) définies ci-dessous :

1. $u_n = \dfrac{2^n}{5}$.
2. $u_n = -n^2 + 5n - 2$.
3. $u_n = \sqrt{n^2 + 3}$.
4. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - 5$.

Exercice n°3

On définit la suite (u_n) par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2n+1}{n+2}.$$

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que (u_n) est majorée par 2.
3. Montrer que (u_n) est minorée.

Exercice n°4

Montrer que la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est croissante.

Exercice n°5

On définit la suite (u_n) par la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.
2. Montrer alors que $u_{n+1} < u_n$ et en déduire les variations de (u_n).
3. Montrer que (u_n) est majorée et minorée.

Exercice n°6

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Trouver le sens de variation de (u_n).

Exercice n°7

Dans chaque cas, dire si la suite (u_n) est arithmétique. Si tel est le cas, donner le premier terme u_0 et la raison de la suite, ainsi que la relation de récurrence.

1. $u_n = 3 + 2n$.
2. $u_n = -3n + 4$.
3. $u_n = 2n^2 - 1$.
4. $u_n = 3(n-2) - 2(n+1)$.
5. $u_n = \dfrac{5n+7}{2}$.
6. $u_n = n\sqrt{5}$.
7. $u_n = 3 - n\sqrt{2}$.
8. $u_n = 7 - \dfrac{3}{n+2}$.
9. $u_n = 3$.

Exercice n°8

Dans chacun des cas suivants, dire si la suite (u_n) est arithmétique. Si tel est le cas, donner le terme général en fonction de n.

1. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n - \sqrt{2}. \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1. \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 3. \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 2. \end{cases}$

Exercice n°9

On considère une suite (u_n) arithmétique de raison r.

1. $u_0 = 3$ et $u_8 = 7$. Calculer r.
2. $u_2 = 5$ et $u_5 = 2$. Calculer r.
3. $u_0 = 5$ et $r = -\dfrac{1}{2}$. Calculer u_9.
4. $u_5 = 6$ et $r = 2$. Calculer u_{20}.
5. $u_7 = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{7}$. Calculer r.

Exercice n°10

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1. Si $u_0 = 5$ et $r = 3$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$.
2. Si $u_0 = 3$ et $u_{50} = 60$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$.
3. Si $u_1 = 60$ et $r = 5$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.
4. Si $u_1 = 50$ et $u_{50} = 1$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{50}$.

Exercice n°11

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_0 = 7820$ et $u_2 = 6712$.

1. Déterminer la relation de récurrence de la suite (u_n).
2. Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
3. Écrire un programme Python correspondant, permettant de trouver le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 1000$.
   Vérifier par le calcul la valeur ainsi trouvée.

Exercice n°12

Des archéologues du XXX^e siècle découvrent dans une grotte une balance électronique à côté de laquelle se trouvent des sacs et une pancarte sur laquelle est écrite :

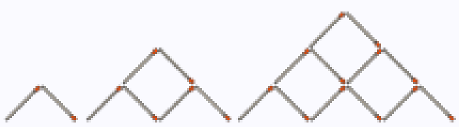
> « Dans chacun des 73 sacs, il y a 100 pièces d'or pesant chacune 5 grammes, sauf dans un sac où elles ne pèsent que 4,5 grammes.
> À l'aide de la balance électronique, qui ne permet qu'une seule pesée, déterminez le sac dans lequel se trouvent les pièces de 4,5 grammes. »

Après réflexion, un des archéologues prend 1 pièce du premier sac, 2 pièces du deuxième, etc. jusqu'à prendre 73 pièces du dernier sac, puis les met toutes sur la balance. La masse indiquée par la balance est alors 13489 grammes.

Trouver le sac dans lequel se trouvent les pièces de 4,5 grammes.

Exercice n°13

Cédric souhaite construire sur une table, à plat, un « château d'allumettes » à plusieurs étages, comme sur le schéma suivant :



— 2 allumettes sont nécessaires pour le 1^er étage ;
— 4 allumettes sont nécessaires pour le 2^e ;
— 6 allumettes sont nécessaires pour le 3^e
— etc.

On note (u_n) le nombre d'allumettes nécessaires pour le n-ième étage, $n \in *$. Ainsi, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$ et $u_3 = 6$.

1. Déterminer u_4.
2. Justifier que (u_n) est une suite arithmétique. Préciser alors sa raison.
3. Déterminer le nombre d'allumettes nécessaires pour construire 20 étages.
4. Compléter le programme Python afin qu'il affiche ce nombre total d'allumettes. u = 2 S = 0
   for n in range(20) : S = ... u = ...
   print(S)

Exercice n°14

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

1. $u_0 = 5$ et $u_2 = 12$. Calculer q.
2. $u_0 = 3$ et $q = 2$. Calculer u_9.
3. $u_2 = 8$ et $q = \dfrac{1}{2}$. Calculer u_8.
4. $u_0 = 2$ et $q = \dfrac{1}{3}$. Calculer u_{10}.
5. $u_5 = 2$ et $q = \sqrt{2}$. Calculer u_7.

Exercice n°15

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

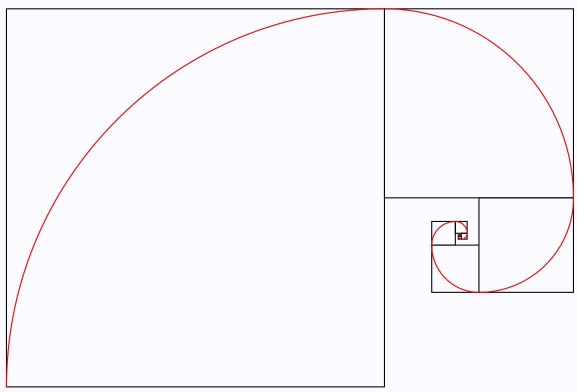
1. Si $u_0 = 1$ et $q = 2$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$.
2. Si $u_0 = 3$ et $q = \dfrac{1}{2}$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$.
3. Si $u_1 = 60$ et $q = \dfrac{1}{3}$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.
4. Si $u_1 = 50$ et $q = 10$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{50}$.

Exercice n°16

Un mot de passe est composé de 1 à 25 caractères choisis parmi une liste de 70 symboles.
Donner un ordre de grandeur du nombre total de mots de passe possibles.

Exercice n°17

On a construit ci-dessous, en rouge, une spirale :



Pour cela,
— on a tracé un carré de côté $c_1 = 10$ cm, puis un quart de cercle à l'intérieur ;
— ensuite, on a tracé un carré de côté $c_2 = 5$ cm à l'intérieur duquel on a tracé un quart de cercle qui « continue » le précédent ;
— etc.

Le côté d'un carré mesure toujours la moitié du côté du carré précédent.
On note c_n la longueur du carré n, et ℓ_n celle du quart de cercle à l'intérieur, $n \geqslant 1$, exprimées en cm.

1. Montrer que (ℓ_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée au millimètre près, de la longueur totale de la spirale si l'on a construit 10 carrés.