Corrigés

Série d'exercices **Classe : 1re SPE** **Lycée : Evariste Galois**

Exercice n°1

Le discriminant et éventuelles racines de trinômes.

1. $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ (c'est une identité remarquable). Par conséquent, $\Delta = 0$ et sa racine double est $\alpha = 1$.
2. $x^2 - 3x + 2$.
$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1.$$
Les racines sont donc :
$$\alpha = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2.$$
3. $-x^2 + 3x - 2$.
$$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 9 - 8 = 1.$$
Les racines sont donc :
$$\alpha = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = 2 \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = 1.$$
4. $x^2 + x + 1$.
$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3.$$
$\Delta < 0$ donc le trinôme n'a aucune racine.
5. $3x^2 - 5x + 1$.
$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 25 - 12 = 13.$$
Les racines sont donc :
$$\alpha = \frac{-(-5) - \sqrt{13}}{2 \times 3} = \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}.$$
6. $-2x^2 - 5x + 3$.
$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25 + 24 = 49.$$
Les racines sont donc :
$$\alpha = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times (-2)} = \frac{5 - 7}{-4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{5 + 7}{-4} = -3.$$
7. $\frac{1}{4}x^2 - 4x + 16$.
$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times 16 = 16 - 16 = 0.$$
Donc le trinôme a une racine double :
$$\alpha = -\frac{-4}{2 \times \frac{1}{4}} = 8.$$
8. $3x^2 - 8x + 2$.
$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 64 - 24 = 40.$$
Les racines sont donc :
$$\alpha = \frac{-(-8) - \sqrt{40}}{2 \times 3} = \frac{4 - \sqrt{10}}{3} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{4 + \sqrt{10}}{6}.$$
9. $-5x^2 + 4x + 3$.
$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-5) \times 3 = 16 + 60 = 76.$$
Les racines sont donc :
$$\alpha = \frac{-4 - \sqrt{76}}{2 \times (-5)} = \frac{2 + \sqrt{19}}{5} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2 - \sqrt{19}}{5}.$$

Exercice n°2

Résolution d'équations :

1. Le domaine de validité de l'équation :
$$\sqrt{x+1} = 2x - 3$$
est l'ensemble des valeurs de x telles que :
$$\begin{cases} x + 1 \geqslant 0 \\ 2x - 3 \geqslant 0 \end{cases}$$
soit :
$$x \geqslant \frac{3}{2}.$$
On a :
$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} = 2x - 3 &\iff x + 1 = (2x-3)^2 \\ &\iff x + 1 = 4x^2 - 12x + 9 \\ &\iff 4x^2 - 13x + 8 = 0. \end{aligned}$$
Le discriminant de $4x^2 - 13x + 8$ est :
$$\Delta = 169 - 128 = 41.$$
Les solutions de l'équation sont donc potentiellement :
$$\alpha = \frac{13 - \sqrt{41}}{8} \approx 0{,}82 \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{13 + \sqrt{41}}{8} \approx 2{,}43.$$
Comme $\alpha < \frac{3}{2}$ et $\beta \geqslant \frac{3}{2}$, l'ensemble solution de l'équation est :
$$\boxed{S = \left\{ \frac{13 + \sqrt{41}}{8} \right\}.}$$
2. Le domaine de validité de l'équation :
$$\sqrt{x^2 - 8} = 2x - 5.$$
est l'ensemble des valeurs de x telles que :
$$\begin{cases} x^2 - 8 \geqslant 0 \\ 2x - 5 \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{soit,} x \geqslant 2\sqrt{2}.$$
On a :
$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 8} = 2x - 5 &\iff x^2 - 8 = (2x-5)^2 \\ &\iff x^2 - 8 = 4x^2 - 20x + 25 \\ &\iff 3x^2 - 20x + 33 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de $3x^2-20x+33$ est : $\Delta = 400-396 = 4$, donc il y a deux solutions potentielles :

$$\alpha = \frac{20-2}{6} = 3 \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{11}{3}.$$

$\alpha > 2\sqrt{2}$ et $\beta > 2\sqrt{2}$ donc l'ensemble solution de l'équation est :

$$\boxed{S = \left\{3 \; ; \; \frac{11}{3}\right\}.}$$

3. Le domaine de validité de l'équation :

$$\sqrt{2x-1} = 1-2x.$$

est l'ensemble des valeurs de x telles que :

$$\begin{cases} 2x-1 \geqslant 0 \\ 1-2x \geqslant 0 \end{cases}$$

soit, $x = \dfrac{1}{2}$.

Donc nul besoin d'aller plus loin ; l'ensemble solution de l'équation $\sqrt{2x-1} = 1-2x$ est :

$$\boxed{S = \left\{\frac{1}{2}\right\}.}$$

Exercice n°3

Résolution d'équations :

1. $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$. On pose $X = \sqrt{x}$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$X^2 - 5X + 4 = 0\,,$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = 25 - 16 = 9.$$

Ainsi, les solutions de l'équation $X^2-5X+4 = 0$ sont :

$$X_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{5+3}{2} = 4.$$

Les solutions de l'équation $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$ doivent donc vérifier :

$$\sqrt{x_1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{x_2} = 4\,,$$

d'où :

$$x_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = 16.$$

D'où :

$$\boxed{S = \{1 \; ; \; 16\}.}$$

2. $-x^4 + 3x^2 - 2 = 0$. On pose $X = x^2$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$-X^2 + 3X - 2 = 0\,,$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = 9 - 8 = 1.$$

Les solutions de l'équation $-X^2+3X-2 = 0$ sont donc :

$$X_1 = \frac{-3-1}{-2} = 2 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-3+1}{-2} = 1.$$

Les solutions de l'équation $-x^4+3x^2-2 = 0$ sont donc x_1 et x_2 tels que :

$$x_1^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2^2 = 2\,,$$

soit :

$$x_1 = 1 \text{ ou } x_1 = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \sqrt{2} \text{ ou } x_2 = -\sqrt{2}.$$

L'ensemble solution de l'équation $-x^4+3x^2-2 = 0$ est donc :

$$\boxed{S = \left\{-\sqrt{2} \; ; \; -1 \; ; \; 1 \; ; \; \sqrt{2}\right\}}$$

3. $(x^2-3x+1)^2 - 3(x^2-3x+1) + 2 = 0$. On pose $X = x^2-3x+1$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$X^2 - 3X + 2 = 0$$

dont les solutions évidentes sont $X_1 = 1$ et $X_2 = 2$.
— $X_1 = 1 \iff x^2-3x+1 = 1 \iff x(x-3) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 3$.
— $X_2 = 2 \iff x^2-3x+1 = 2 \iff x^2-3x-1 = 0$. Le discriminant de cette dernière équation est $\Delta = 9+4 = 13$ donc les solutions sont :

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble solution de l'équation $(x^2-3x+1)^2 - 3(x^2-3x+1) + 2 = 0$ est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{3-\sqrt{13}}{2} \; ; \; 0 \; ; \; 3 \; ; \; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}}$$

4. $\dfrac{6}{x^2} + \dfrac{1}{x} - 2 = 0$. On pose $X = \dfrac{1}{X}$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$6X^2 + X - 2 = 0$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 6 \times (-2) = 49 = 7^2.$$

Les solutions de l'équation $6X^2+X-2 = 0$ sont donc :

$$X_1 = \frac{-1-7}{2\times 6} = -\frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-1+7}{12} = \frac{1}{2}.$$

— $X_1 = -\dfrac{2}{3}$ et $X_1 = \dfrac{1}{x_1}$ donc $x_1 = \dfrac{1}{X_1} = -\dfrac{3}{2}$;
— $X_2 = \dfrac{1}{2}$ et $X_2 = \dfrac{1}{x_2}$ donc $x_2 = \dfrac{1}{X_2} = 2$.

Ainsi, l'ensemble solution de l'équation $\dfrac{6}{x^2} + \dfrac{1}{x} - 2 = 0$ est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2} \; ; \; 2\right\}}.$$

Exercice n°4

On souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) suivante :

$$4x^2 + 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x - \sqrt{6} = 0.$$

1. (a) $$\Delta = 20+8\sqrt{6}$$
$$\iff \left(a+b\sqrt{6}\right)^2 = 20+8\sqrt{6}$$
$$\iff a^2+2ab\sqrt{6}+6b^2 = 20+8\sqrt{6}$$
$$\iff a^2+6b^2+2ab\sqrt{6} = 20+8\sqrt{6}$$
$$\iff \begin{cases} a^2+6b^2 &= 20 \\ 2ab &= 8 \end{cases}$$
$$\iff \boxed{\begin{cases} a^2+6b^2 &= 20 \\ ab &= 4 \end{cases}}$$

(b) $ab = 4$ donc $b = \dfrac{4}{a}$. La première équation donne alors :
$$\begin{aligned} a^2+6b^2 = 20 &\iff a^2+\left(\frac{4}{a}\right)^2 = 20 \\ &\iff a^2+6\times\frac{16}{a^2} = 20 \\ &\iff a^4+96 = 20a^2 \\ &\iff \boxed{a^4-20a^2+96 = 0.} \end{aligned}$$

(c) On pose $A = a^2$; l'équation $a^4-20a^2+96 = 0$ est équivalente à :
$$A^2-20A+96 = 0$$
dont le discriminant est :
$$\Delta' = (-20)^2-4\times 1\times 96 = 16 = 4^2.$$
L'équation $A^2-20A+96 = 0$ admet donc deux solutions :
$$A_1 = \frac{20-4}{2} = 8 = a_1^2 \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{20+4}{2} = 12 = a_2^2.$$
Ainsi, $a_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ou $a_1 = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$, et $a_2 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ou $a_2 = -2\sqrt{3}$.
Faisons le choix de prendre $a = 2\sqrt{2}$; alors $b = \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.
Dans ce cas, $a+b\sqrt{6} = 2\sqrt{2}+\sqrt{2}\times\sqrt{6} = 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.
Or, $\left[2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]^2 = 4\left(2+3+2\sqrt{6}\right) = 20+8\sqrt{6} = \Delta$.
Ainsi, $\boxed{\sqrt{\Delta} = 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$.

2. Le discriminant de $4x^2+2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{6}$ est :
$$\begin{aligned} \Delta &= \left[2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]^2-4\times 4\times\left(-\sqrt{6}\right) \\ &= 4\left(3+2-2\sqrt{6}\right)+16\sqrt{6} \\ &= \boxed{20+8\sqrt{16}}. \end{aligned}$$
Ainsi, l'équation admet deux solutions distinctes :
$$x_1 = \frac{-2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{\Delta}}{2\times 4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
et
$$x_2 = \frac{-2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\sqrt{\Delta}}{2\times 4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Ainsi,
$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}}.$$

Exercice n°5

On considère le trinôme x^2+mx+p, où m et p sont deux réels.
On sait qu'un trinôme admet au moins une racine lorsque son discriminant Δ est positif ou nul.
Ici,
$$\Delta = m^2-4p.$$
Il faut donc que :
$$m^2 \geqslant 4p$$
pour que le trinôme ait au moins une racine.

Exercice n°6

Montrer que, pour tout k dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, le polynôme :
$$P(x) = (k+1)x^2+2kx+(k-1)$$
Le discriminant de :
$$P(x) = (k+1)x^2+2kx+(k-1)$$
est :
$$\begin{aligned} \Delta &= (2k)^2-4\times(k+1)\times(k-1) \\ &= 4k^2-4(k^2-1) \\ &= 4 > 0. \end{aligned}$$
Donc P admet toujours deux racines, quelle que soit la valeur de k.

Exercice n°7

On considère le trinôme suivant :
$$(m+3)x^2+2(3m+1)x+(m+3).$$

Le trinôme admet une racine double si $\Delta = 0$. Or,
$$\begin{aligned} \Delta &= b^2-4ac \\ &= \left[2(3m+1)\right]^2-4\times(m+3)\times(m+3) \\ &= 4(3m+1)^2-4(m+3)^2 \\ &= 4\Big[\underbrace{(3m+1)^2}_{=A^2}-\underbrace{(m+3)^2}_{=B^2}\Big] \\ &= 4\left[(3m+1)-(m+3)\right]\left[(3m+1)+(m+3)\right] \\ &= 4(3m+1-m-3)(3m+1+m+3) \\ &= 4(2m-2)(4m+4) \end{aligned}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} \Delta = 0 &\iff 4(2m-2)(4m+4) = 0 \\ &\iff 2m-2 = 0 \quad \text{ou} \quad 4m+4 = 0 \\ &\iff 2m = 2 \quad \text{ou} \quad 4m = -4 \\ &\iff m = 1 \quad \text{ou} \quad m = -1. \end{aligned}$$
Par conséquent, le trinôme admet une racine double pour $m = 1$ ou $m = -1$.

Dans un tel cas, la racine double est égale à :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2(3m+1)}{2(m+3)} = -\frac{3m+1}{m+3}.$$

Ainsi,

— pour $m = 1$, la racine double vaut $\alpha = \frac{3\times 1+1}{1+3} = -1$,

— pour $m = -1$, la racine double vaut $\alpha = -\frac{3\times(-1)+1}{-1+3} = 1$.

Exercice n°8

On considère l'équation suivante :

$$(4m+1)x^2 - 4mx + m - 3 = 0.$$

L'équation admet deux solutions distinctes uniquement si $\Delta > 0$. Or,

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-4m)^2 - 4\times(4m+1)\times(m-3)\\ &= 16m^2 - 4(4m+1)(m-3)\\ &= 16m^2 - 4(4m^2 - 12m + m - 3)\\ &= 16m^2 - 4(4m^2 - 11m - 3)\\ &= 16m^2 - 16m^2 + 44m + 12\\ &= 44m + 12.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\Delta > 0 &\iff 44m + 12 > 0\\ &\iff 44m > -12\\ &\iff m > \frac{-12}{44}\\ &\iff m > -\frac{3}{11}.\end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation admet deux solutions distinctes pour $m > -\frac{3}{11}$.

Exercice n°9

On considère l'équation :

$$(2m+1)x^2 + (m-1)x + (m+4)(m-1) = 0. \quad (E_m)$$

1. Pour $m = 0$, on a :

$$(E_0) \quad : \quad x^2 - x - 4 = 0$$

Le discriminant du polynôme $x^2 - x - 4$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-1)^2 - 4\times 1\times(-4)\\ &= 1 + 16\\ &= 17.\end{aligned}$$

Ainsi, $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions à l'équation (E_0) qui sont :

$$\alpha = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \text{ et } \beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

L'ensemble solution de (E_0) est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{1-\sqrt{17}}{2} \ ; \ \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}.$$

2. L'équation (E_m) admet une unique solution lorsque le discriminant du membre de gauche est égal à 0. Ce discriminant est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (m-1)^2 - 4(2m+1)(m+4)(m-1)\\ &= (m-1)\big[(m-1) - 4(2m+1)(m+4)\big]\\ &= (m-1)\big[m - 1 - 4(2m^2 + 8m + m + 4)\big]\\ &= (m-1)(m - 1 - 8m^2 - 36m - 16)\\ &= (m-1)(-8m^2 - 35m - 17).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta = 0 &\iff m - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad -8m^2 - 35m - 17 = 0\\ &\iff m = 1 \quad \text{ou} \quad 8m^2 + 35m + 17 = 0\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $8m^2 + 35m + 17$ est :

$$\delta = 35^2 - 4\times 8\times 17 = 681 \ ,$$

donc ce polynôme admet deux racines :

$$m_1 = \frac{-35-\sqrt{681}}{16} \text{ et } m_2 = \frac{-35+\sqrt{681}}{16}.$$

Ainsi, l'équation (E_m) admet une unique solution pour trois valeurs de m :

$$m = 1; \qquad m = \frac{-35-\sqrt{681}}{16}; \quad m = \frac{-35+\sqrt{681}}{16}.$$

3. (E_m) admet 1 pour solution si, en remplaçant x par 1 dans l'équation, l'égalité est vérifiée :

$$\begin{aligned}&1 \text{ est solution de } (E_m)\\ \iff &(2m+1)\times 1^2 + (m-1)\times 1 + (m+4)(m-1) = 0\\ \iff &2m + 1 + m - 1 + m^2 - m + 4m - 4 = 0\\ \iff &m^2 + 6m - 4 = 0.\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $m^2 + 6m - 4$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 6^2 - 4\times 1\times(-4)\\ &= 36 + 16\\ &= 52.\end{aligned}$$

Il existe donc deux solutions à l'équation $m^2 + 6m - 4 = 0$:

$$m_1 = \frac{-6-\sqrt{52}}{2} = -3-\sqrt{13} \quad \text{et} \quad m_2 = -3+\sqrt{13}.$$

Ainsi, $x = 1$ est solution de l'équation (E_m) pour $m = -3+\sqrt{13}$ et pour $m = -3-\sqrt{13}$.

Exercice n°10

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$.

1. $$\begin{aligned} P(-2) &= 2 \times (-2)^3 + 7 \times (-2)^2 + 7 \times (-2) + 2 \\ &= -16 + 28 - 14 + 2 \\ &= -30 + 30 \\ &= 0. \end{aligned}$$
   $P(-2) = 0$ donc $x = -2$ est une racine de P.
2. $$\begin{aligned} P(x) &= (x+2)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c \\ &= ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c \end{aligned}$$
   Ainsi, on souhaite que, pour tout réel x :
   $$2x^3+7x^2+7x+2 = ax^3+(b+2a)x^2+(c+2b)x+2c.$$
   Par identification des coefficients, on a :
   $$\begin{cases} 2 = a \\ 7 = b + 2a \\ 7 = c + 2b \\ 2 = 2c \end{cases}$$
   On en déduit que $a = 2$ et $c = 1$. Par suite, à l'aide de la troisième équation (par exemple), on trouve $b = 3$.
   Finalement, on obtient :
   $$\boxed{P(x) = (x+2)(2x^2 + 3x + 1)}$$
3. $P(x) = 0 \iff x+2 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x^2+3x+1 = 0$.
   Le discriminant de $2x^2 + 3x + 1 = 0$ est $\Delta = 9 - 8 = 1$ donc il admet deux racines :
   $\alpha = \dfrac{-3-1}{4} = -1$ et $\beta = \dfrac{-3+1}{4} = -\dfrac{1}{2}$.
   Par conséquent, l'ensemble solution de l'équation $P(x) = 0$ est :
   $$\boxed{S = \left\{-2\ ;-1\ ;-\frac{1}{2}\right\}}$$

Exercice n°11

On considère le polynôme $P(x) = 10x^4 - 29x^3 - 34x^2 + 107x - 42$.

1. $P(3) = 0$ et $P(-2) = 0$.
2. On en déduit que $P(x) = (x-3)(x+2)(ax^2 + bx + c)$, soit $P(x) = (x^2 - x - 6)(ax^2 + bx + c)$.
   $$\begin{aligned} &(x^2 - x - 6)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^4 + bx^3 + cx^2 - ax^3 - bx^2 - cx - 6ax^2 - 6bx - 6c \\ &= ax^4 + (b-a)x^3 + (c - b - 6a)x^2 + (-c - 6b)x - 6c \\ &= 10x^4 - 29x^3 - 34x^2 + 107x - 42 \end{aligned}$$
   Donc :
   $$\begin{cases} a & = 10 \\ b - a & = -29 \\ c - b - 6a & = -34 \\ -c - 6b & = 107 \\ -6c & = -42 \end{cases}$$
   On en déduit que $a = 10$ et $c = 7$, puis que $b = -29 + a = -19$.
   Finalement, $\boxed{P(x) = (x^2 - x - 6)(10x^2 - 19x + 7)}$.
3. Le discriminant du polynôme $10x^2 - 19x + 7$ est :
   $$\Delta = (-19)^2 - 4 \times 10 \times 7 = 81 = 9^2.$$
   Ses deux racines sont alors :
   $$x_1 = \frac{19-9}{20} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{19+9}{20} = \frac{7}{5}.$$
   Les racines de P sont donc : -2, 3, $\dfrac{7}{5}$ et $\dfrac{1}{2}$.

Exercice n°12

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2.$$

1. $f(1) = 3 \times 1^3 + 2 \times 1^2 - 3 \times 1 - 2 = 3 + 2 - 3 - 2 = 0$.
2. $$\begin{aligned} (x-1)(ax^2 + bx + c) &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$
   Ainsi, pour tout réel x :
   $$\begin{aligned} & f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ \iff\ & 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \\ \iff\ & \begin{cases} a & = 3 \\ b - a & = 2 \\ c - b & = -3 \\ -c & = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ c = 2 \end{cases} \end{aligned}$$
   On a alors :
   $$f(x) = (x-1)(3x^2 + 5x + 2).$$
3. $f(1) = 0$ donc $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $x = 1$. On peut donc éliminer la courbe b.
   De plus, le discriminant de $3x^2 + 5x + 2$ est :
   $$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0\ ,$$
   donc ce polynôme admet 2 racines distinctes, ce qui signifie que $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en 3 points distincts.
   Ainsi, la courbe a est celle qui représente la fonction f.

Exercice n°13

Résolution d'inéquations :

1. $x^2 + x + 1 < 0$.
   Le discriminant de x^2+x+1 est $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc le trinôme est du signe du coefficient de x^2, soit « 1 » ici, donc positif.
   L'ensemble solution est donc :
   $$\boxed{S = \varnothing}$$

2. $2x^2 - 5x + 3 \leqslant 0$
   Le discriminant de $2x^2 - 5x + 3$ est $\Delta = 25 - 24 = 1$. Il y a donc deux racines : $\alpha = \dfrac{5-1}{4} = 1$ et $\beta = \dfrac{5+1}{4} = \dfrac{3}{2}$.
   Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de $-a$ entre ses racines, donc $2x^2 - 5x + 3 \leqslant 0$ pour $x \in \left[1; \dfrac{3}{2}\right]$.

$$\boxed{S = \left[1; \frac{3}{2}\right].}$$

3. $-x^2 + 3x - 2 > 0$
   Le discriminant de $-x^2 + 3x - 2$ est $\Delta = 9 - 4 \times (-1) \times (-2) = 1$ donc il admet deux racines distinctes : $\alpha = \dfrac{-3-1}{-2} = 2$ et $\beta = \dfrac{-3+1}{-2} = 1$.
   Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de $-a$ entre ses racines donc l'ensemble solution de l'inéquation est :

$$\boxed{S =]1; 2[\,.}$$

4. $-5x^2 - 9x + 3 \leqslant 0$.
   Le discriminant de $-5x^2 - 9x + 3$ est $\Delta = 81 - 4 \times (-5) \times 3 = 21$ donc il admet deux racines : $\alpha = \dfrac{9 - \sqrt{21}}{-10} = \dfrac{-9 + \sqrt{21}}{10}$ et $\beta = \dfrac{-9 - \sqrt{21}}{10}$.
   Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a (donc négatif) à l'extérieur des racines, donc l'ensemble solution de l'inéquation est :

$$S = \left]-\infty; \frac{-9+\sqrt{21}}{10}\right] \cup \left[\frac{-9+\sqrt{21}}{10}; +\infty\right[.$$

5. $3x^2 - 7x + 10 \geqslant 0$
   Le discriminant de $3x^2 - 7x + 10$ est $\Delta = 49 - 4 \times 3 \times 10 = -71 < 0$ donc il est toujours du signe de « 3 », donc positif. L'ensemble solution est donc :

$$\boxed{S = \mathbb{R}.}$$

6. $4x^2 - 20x + 25 > 0$
   Le discriminant de $4x^2 - 20x + 25$ est $\Delta = 400 - 4 \times 4 \times 25 = 0$. Par conséquent, il est du signe de « 4 » (donc positif) tout le temps sauf en sa racine $\alpha = -\dfrac{-20}{2 \times 4} = \dfrac{5}{2}$ (où il est nul). Par conséquent, l'ensemble solution de l'inéquation est :

$$\boxed{S = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}}$$

7. $\dfrac{1 - 4x}{x^2 - 3x + 2} \geqslant 0$
   Le discriminant de $x^2 - 3x + 2$ est $\Delta = 9 - 8 = 1$. Par conséquent, il admet deux racines distinctes $\alpha = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $\beta = \dfrac{3+1}{2} = 2$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		1		2		$+\infty$
$1 - 4x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x^2 - 3x + 2$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\dfrac{1-4x}{x^2-3x+2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

L'ensemble solution de l'inéquation est alors :

$$\boxed{S =]-\infty; \frac{1}{4}] \cup]1; 2[}$$

8. $(2x - 3)(-2x^2 + 5x + 3) < 0$
   Le discriminant de $-2x^2 + 5x + 3$ est $\Delta = 25 + 24 = 49$ donc il admet deux racines : $\alpha = \dfrac{-5-7}{-4} = 3$ et $\beta = \dfrac{-5+7}{-4} = -\dfrac{1}{2}$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$2x - 3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x^2 + 5x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(2x - 3)(-2x^2 + 5x + 3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble solution de l'inéquation est alors :

$$\boxed{S =]-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}[\cup]3; +\infty[.}$$

Exercice n°14

Résolution de l'inéquation :

$$\frac{7x - 10}{5x - 17} \geqslant \frac{25(x+2)}{10x^2 - 49x + 51}.$$

Avant toute chose, on cherche le domaine de validité de l'inéquation.

Cette inéquation existe lorsque :

$$\begin{cases} 5x - 17 \neq 0 \\ 10x^2 - 49x + 51 \neq 0 \end{cases}$$

Le discriminant du polynôme $10x^2 - 49x + 51$ est :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-49)^2 - 4 \times 10 \times 51 \\ &= 361 \\ &= 19^2 > 0 \end{aligned}$$

donc il admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-49) - 19}{2 \times 10} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{49 + 19}{20} = \frac{17}{5}.$$

Il peut donc se factoriser sous la forme :

$$\begin{aligned} 10x^2 - 49x + 51 &= 10\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{17}{5}\right) \\ &= 5 \times 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{17}{5}\right) \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right) \times 5\left(x - \frac{17}{5}\right) \\ &= (2x - 3)(5x - 17). \end{aligned}$$

Cette factorisation va être importante pour la résolution de l'inéquation.

Le domaine de validité de l'inéquation est donc $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}; \dfrac{17}{5}\right\}$.

$$\frac{7x-10}{5x-17} \geqslant \frac{25(x+2)}{10x^2-49x+51}$$
$$\iff \frac{7x-10}{5x-17} - \frac{25(x+2)}{10x^2-49x+51} \geqslant 0$$
$$\iff \frac{7x-10}{5x-17} - \frac{25(x+2)}{(2x-3)(5x-17)} \geqslant 0$$
$$\iff \frac{(7x-10)(2x-3)}{(5x-17)(2x-3)} - \frac{25(x+2)}{(2x-3)(5x-17)} \geqslant 0$$
$$\iff \frac{14x^2-21x-20x+30-25x-50}{10x^2-49x+51} \geqslant 0$$
$$\iff \frac{14x^2-66x-20}{10x^2-49x+51} \geqslant 0$$
$$\iff \frac{2(7x^2-33x-10)}{10x^2-49x+51} \geqslant 0$$

Le discriminant du polynôme $7x^2-33x-10$ est :

$$\begin{aligned}\Delta' &= (-33)^2 - 4\times 7\times(-10)\\ &= 1369\\ &= 37^2 > 0.\end{aligned}$$

Donc il admet deux racines distinctes : $\alpha = \frac{-(-33)-37}{2\times 7} = -\frac{2}{7}$ et $\beta = \frac{33+37}{14} = 5$.
En utilisant la propriété du signe d'un trinôme du second degré, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{7}$		3		$\frac{17}{5}$		5		$+\infty$
$7x^2-33x-10$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$10x^2-49x+51$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2(7x^2-33x-10)}{10x^2-49x+51}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\boxed{S = \left]-\infty; -\frac{2}{7}\right[\cup \left]\frac{3}{2}; \frac{17}{5}\right[\cup [5; +\infty[}$.

Exercice n°15

Résolution d'inéquations :

1. On recherche d'abord les valeurs interdites, donc les valeurs de x pour lesquelles :
$$x^2+x+1=0$$
Le discriminant de x^2+x+1 est :
$$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times1\times1 = -3.$$
$\Delta < 0$ donc le dénominateur n'admet aucune racine ; il ne s'annule donc pas.
Il n'y a donc pas de valeurs interdites ; par conséquent, le domaine de définition de l'inéquation est : $\mathbb{R}$.
2. Recherche des racines du numérateur : $5x^2-3x-2$.
$$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\times5\times(-2) = 9+40 = 49.$$
Il y a donc deux racines :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-7}{10} = -\frac{2}{5}$$
et
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+7}{10} = 1.$$
3. On déduit alors le tableau de signes suivant :

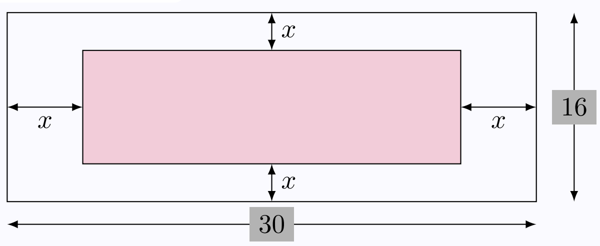
x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		1		$+\infty$
$5x^2-3x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$		$+$		$+$	
$\frac{5x^2-3x-2}{x^2+x+1}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble solution de l'inéquation est donc :
$$\boxed{S = \left]-\frac{2}{5}; 1\right[}$$
4. On cherche avant tout les valeurs interdites, donc les valeurs de x pour lesquelles :
$$x^2+x-6=0.$$
$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times1\times(-6) = 25 > 0.$
Donc il y a deux valeurs interdites :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{25}}{2} = -3$$
et
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{25}}{2} = 2.$$
Le domaine de définition de l'inéquation est donc : $\setminus\{-3; 2\}$.
5. On cherche maintenant les racines du numérateur : $-3x^2-5x+2$.
$$\Delta = b^2-4ac = (-5)^2-4\times(-3)\times2 = 49.$$
Il y a donc deux racines :
$$x_3 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-\sqrt{49}}{-6} = \frac{1}{3}$$
et
$$x_4 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+\sqrt{49}}{-6} = -2.$$
6. On construit le tableau de signes de la fraction :

x	$-\infty$		-3		-2		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$-3x^2-5x+2$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
x^2+x-6		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-3x^2-5x+2}{x^2+x-6}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

L'ensemble solution est donc :
$$\boxed{S =]-\infty; -3[\cup \left]-2; \frac{1}{3}\right[\cup]2; +\infty[}$$

Exercice n°16



Déterminer x de sorte que l'aire de la partie blanche de la figure ci-dessus soit égale à celle du rectangle plein.

Notons $\mathcal{A}$ l'aire du « grand rectangle » à l'intérieur duquel se trouve le rectangle plein, dont l'aire sera notée $\mathcal{A}'$.
$\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ désignera donc l'aire de la partie blanche.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} - \mathcal{A}' &= 30 \times 16 - (30 - 2x)(16 - 2x) \\ &= 480 - (480 - 60x - 32x + 4x^2) \\ &= 92x - 4x^2.\end{aligned}$$

Ainsi, l'aire de la partie blanche est égale à celle du rectangle intérieur si :

$$\begin{aligned}92x - 4x^2 = 480 - 92x + 4x^2 &\iff 8x^2 - 184x + 480 = 0 \\ &\iff x^2 - 23x + 60 = 0\end{aligned}$$

Le discriminant de $x^2 - 23x + 60$ est :

$$\Delta = (-23)^2 - 4 \times 60 = 289 = 17^2$$

donc les solutions de l'équation $x^2 + 23x + 60 = 0$ sont :

$$x_1 = \frac{23 - 17}{2} = 3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{23 + 17}{2} = 20.$$

Or, $0 \leqslant x \leqslant 8$ car la largeur du rectangle extérieur est égale à 16 et que x ne peut excéder sa moitié.

Ainsi, pour $x = 3$, l'aire de la partie blanche est égale à celle du rectangle intérieur.

Exercice n°17

Deux entiers naturels ont pour différence 7, et la différence entre leur produit et leur somme est égale à 43. Trouver ces deux nombres.

Notons x et y les deux nombres. On sait alors d'après l'énoncé que :

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ xy - (x + y) = 43 \end{cases}$$

La première équation nous donne :

$$x = 7 + y$$

donc en remplaçant x par cette dernière expression dans la seconde équation, on a :

$$\begin{aligned}(7 + y)y - (7 + y + y) = 43 &\iff 7y + y^2 - 7 - 2y = 43 \\ &\iff y^2 + 5y - 50 = 0.\end{aligned}$$

Le discriminant de $y^2 + 5y - 50$ est :

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-50) = 25 + 200 = 225 = 15^2$$

donc deux valeurs sont possibles pour y :

$$y_1 = \frac{-5 - 15}{2} = -10 \qquad \text{et} \qquad y_2 = \frac{-5 + 15}{2} = 5.$$

Or, $y \in$ donc $y \neq -10$; seule $y = 5$ est une valeur possible.
On en déduit alors que $x = 7 + y = 7 + 5 = 12$.

Les deux nombres sont donc 5 et 12.

Exercice n°18

Plusieurs personnes se sont réunies pour fêter Noël. Chaque personne a apporté trois cadeaux à chacune des autres personnes.
Sachant qu'au total 468 cadeaux ont été déposés près de l'arbre de Noël, combien de personnes y avait-il ?

Notons x le nombre total de personnes.
Une personne offre 3 cadeaux à $(x - 1)$ personnes donc :

$$3x(x - 1) = 468$$

soit :

$$x(x - 1) = 156$$

ou encore :

$$x^2 - x - 156 = 0.$$

Le discriminant de $x^2 - x - 156$ est :

$$\Delta = (-1)^2 + 4 \times 1 \times 156 = 625 = 25^2.$$

Il y a donc deux racines :

$$\alpha = \frac{-(-1) - 25}{2} = -12 < 0 \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{1 + 25}{2} = 13 > 0.$$

Il n'y a donc qu'une solution à notre problème : il y a 13 personnes.

Exercice n°19

Un joueur de tennis se trouve à 9 m du filet et renvoie la balle à $h = 50$ cm du sol avec un angle de $\alpha = 20°$ avec l'horizontale.

En fonction de sa position délicate, on estime sa vitesse de frappe à $v_0 = 20$ km/h. Sachant que la hauteur du filet est 91,4 cm et que la trajectoire de la balle est donnée par la formule :

$$y = -\frac{1}{2} \times \frac{g}{(v_0 \cos\alpha)^2} x^2 + x \tan\alpha + h\ ,$$

où :
- $g \approx 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$,
- v_0 est la vitesse initiale (exprimée en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$),
- α est l'angle de la trajectoire avec l'horizontale,
- h est la hauteur initiale (exprimée en mètre),

La balle dépassera-t-elle le filet ?
Si tel n'est pas le cas, quelle vitesse aurait-il fallu donner à la balle en la frappant ?