1

Le second degré

Série d'exercices

Corrigés Classe : 1re SPE Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Pour chacun des trinômes suivants, calculer le discriminant et ses éventuelles racines.

1. $x^2 - 2x + 1$;
2. $x^2 - 3x + 2$;
3. $-x^2 + 3x - 2$;
4. $x^2 + x + 1$;
5. $3x^2 - 5x + 1$;
6. $-2x^2 - 5x + 3$
7. $\dfrac{1}{4}x^2 - 4x + 16$;
8. $3x^2 - 8x + 2$;
9. $-5x^2 + 4x + 3$.

Exercice n°2

Résoudre les équations suivantes :

1. $\sqrt{x+1} = 2x - 3$;
2. $\sqrt{x^2 - 8} = 2x - 5$;
3. $\sqrt{2x-1} = 1 - 2x$.

Exercice n°3

Résoudre les équations suivantes :

1. $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$;
2. $-x^4 + 3x^2 - 2 = 0$;
3. $\dfrac{6}{x^2} + \dfrac{1}{x} - 2 = 0$;
4. $(x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 2 = 0$.

Exercice n°4

On souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) suivante :

$$4x^2 + 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)x - \sqrt{6} = 0$$

1. On pose $\Delta = 20 + 8\sqrt{6}$ et on suppose que $\Delta = \left(a + b\sqrt{6}\right)^2$.
   (a) Montrer que $a^2 + 6b^2 = 20$ et $ab = 4$.
   (b) En déduire que $a^4 - 20a^2 + 96 = 0$.
   (c) Trouver alors a et b et en déduire $\sqrt{\Delta}$.
2. En déduire les solutions de (E).

Exercice n°5

On considère le trinôme $x^2 + mx + p$, où m et p sont deux réels.

À quelles conditions sur m et p ce trinôme admet au moins une racine ?

Exercice n°6

Montrer que, pour tout k dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, le polynôme :

$$P(x) = (k+1)x^2 + 2kx + (k-1)$$

admet toujours deux racines distinctes.

Exercice n°7

On considère le trinôme suivant :

$$(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3).$$

Pour quelles valeurs de m a-t-il une racine double ? Calculer alors cette racine.

Exercice n°8

On considère l'équation suivante :

$$(4m+1)x^2 - 4mx + m - 3 = 0.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de m admet-elle des solutions distinctes ?

Exercice n°9

On considère l'équation :

$$(2m+1)x^2 + (m-1)x + (m+4)(m-1) = 0. \quad (E_m)$$

1. Pour $m = 0$, donner les solutions de (E_0).
2. Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) admet-elle une unique solution ?
3. Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) admet-elle $x = 1$ pour solution ?

Exercice n°10

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$.

1. Vérifier que $x = -2$ est une racine de P.
2. Factoriser alors $P(x)$ sous la forme
$$P(x) = (x+2)Q(x),$$
où Q est un trinôme de degré 2.
3. Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.

Exercice n°11

On considère le polynôme $P(x) = 10x^4 - 29x^3 - 34x^2 + 107x - 42$.

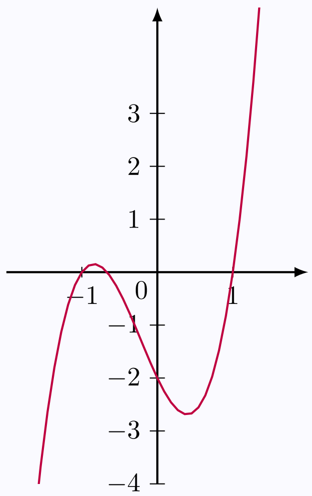
1. Calculer $P(3)$ et $P(-2)$.
2. En déduire que $P(x) = A(x) \times B(x)$, où A et B sont deux polynômes de degré 2 que l'on déterminera.
3. En déduire les racines de P.

Exercice n°12

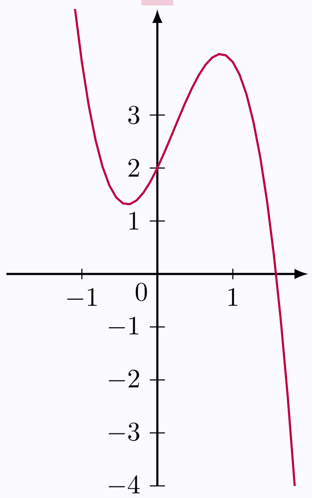
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2.$$

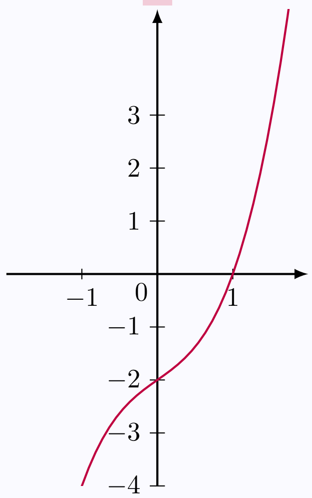
1. Montrer que $f(1) = 0$.
2. En déduire une factorisation de $f(x)$ sous la forme $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
3. En déduire la courbe représentative de f parmi les trois proposées ci-dessous.



a



b



c

Exercice n°13

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2 + x + 1 < 0$;
2. $2x^2 - 5x + 3 \leqslant 0$;
3. $-x^2 + 3x - 2 > 0$;
4. $-5x^2 - 9x + 3 \leqslant 0$;
5. $3x^2 - 7x + 10 \geqslant 0$;
6. $4x^2 - 20x + 25 > 0$;
7. $\dfrac{1-4x}{x^2 - 3x + 2} \geqslant 0$;
8. $(2x-3)(-2x^2 + 5x + 3) < 0$.

Exercice n°14

Résoudre l'inéquation :

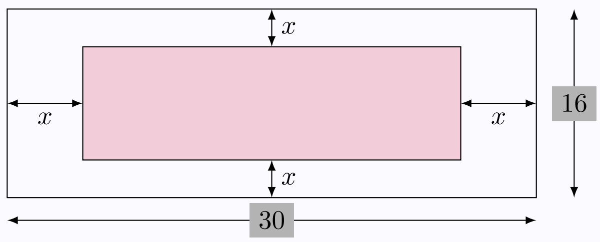
$$\frac{7x-10}{5x-17} \geqslant \frac{25(x+2)}{10x^2 - 49x + 51}.$$

Exercice n°15

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{5x^2 - 3x - 2}{x^2 + x + 1} < 0$;
2. $\dfrac{-3x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 6} < 0$.

Exercice n°16



Déterminer x de sorte que l'aire de la partie blanche de la figure ci-dessus soit égale à celle du rectangle plein.

Exercice n°17

Deux entiers naturels ont pour différence 7, et la différence entre leur produit et leur somme est égale à 43. Trouver ces deux nombres.

Exercice n°18

Plusieurs personnes se sont réunies pour fêter Noël. Chaque personne a apporté trois cadeaux à chacune des autres personnes.
Sachant qu'au total 468 cadeaux ont été déposés près de l'arbre de Noël, combien de personnes y avait-il ?

Exercice n°19

Un joueur de tennis se trouve à 9 m du filet et renvoie la balle à $h = 50$ cm du sol avec un angle de $\alpha = 20°$ avec l'horizontale.

En fonction de sa position délicate, on estime sa vitesse de frappe à $v_0 = 20$ km/h. Sachant que la hauteur du filet est 91,4 cm et que la trajectoire de la balle est donnée par la formule :

$$y = -\frac{1}{2} \times \frac{g}{(v_0 \cos\alpha)^2} x^2 + x \tan\alpha + h \ ,$$

où :
- $g \approx 9{,}81 \ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$,
- v_0 est la vitesse initiale (exprimée en $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$),
- α est l'angle de la trajectoire avec l'horizontale,
- h est la hauteur initiale (exprimée en mètre),

La balle dépassera-t-elle le filet ?
Si tel n'est pas le cas, quelle vitesse aurait-il fallu donner à la balle en la frappant ?

Exercice n°20

Un jeu consiste à tirer au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
- Si c'est un 7, 8, 9 ou 10, on perd 30 €.
- Si c'est une figure (valet, dame ou roi), on gagne 10 €.
- Si c'est un as, on gagne 10 €.

On note X la variable aléatoire représentant le gain (en euros) à l'issue du jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer son espérance mathématique.
   À qui ce jeu est-il favorable ? Justifier.
3. Quel devrait être le gain pour un As afin que le jeu soit équitable ?