Série d'exercices

Corrigés Classe : 1re SPE Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Simplifier les nombres suivants en donnant le résultat sous la forme d'une seule exponentielle.

1. $e^5 \times e^{-3}$.
2. $\dfrac{e^{-9}}{e^7}$.
3. $\left(e^{-2}\right)^3$.
4. $\dfrac{e^3 \times e^{-4}}{e^{-2}}$.
5. $\dfrac{e^2 \times e^{-2}}{e^{-1}}$.
6. $\left(e^{-1} \times e^{-2}\right)^3$.

Exercice n°2

Simplifier les expressions suivantes en donnant le résultat sous la forme d'une seule exponentielle.

1. $e^{2x-1} \times e^{-x+3}$.
2. $\dfrac{e^{3x-1}}{e^{4x-2}}$.
3. $\left(e^{-x+1} \times e^{x-1}\right)^2$.
4. $\left(\dfrac{e^{2x+3} \times e^{3x-2}}{e^4}\right)^{-1}$.

Exercice n°3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{x+2} = 0$.
2. $e^{x^5+x+1} = -1$.
3. $e^{2x+3} = e^{-2x-5}$.
4. $e^{5x+2} = e^{3x+1}$.
5. $e^{x^2-1} = e^{2x^2+3x-2}$.
6. $5 - 2e^{3x+2} = 3$.
7. $2 + 3e^{2x} = 5$.
8. $7 - 4e^{5x-3} = 3$.

Exercice n°4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$.
2. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$.

Exercice n°5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ est inéquations suivantes.

1. $e^{3x-1} > e^{2x+4}$
2. $e^{-2x+5} \leqslant e^{4x+7}$
3. $e^{x^2-1} < e$
4. $12 - 4e^{5x+1} \geqslant 8$
5. $8 + 3e^{-2x+3} \leqslant 11$
6. $56 + 14e^{47x-15} > 70$

Exercice n°6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{2x} + e^x - 2 \geqslant 0$.
2. $e^{2x} - 2e^x + 1 \leqslant 0$.

Exercice n°7

On considère la fonction f définie par pour tout réel x par :

$$f(x) = (7x-1)e^x$$

1. Montrer que sa dérivée est égale à $f'(x) = (7x+6)e^x$.
2. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (3-2x)e^{-x}.$$

1. Montrer que sa dérivée est égale à
$$f'(x) = (2x-5)e^{-x}.$$
2. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°9

Étudier sur $\mathbb{R}$ les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Exercice n°10

Étudier sur $\mathbb{R}$ les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Exercice n°11

On considère la fonction f définie pour tout réel x appartenant à son domaine de définition par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}-6}{2e^x+7}.$$

1. Justifier que son domaine de définition est $\mathbb{R}$.
2. Montrer que sa dérivée est
$$f'(x) = \frac{2e^x\left(e^{2x}+7e^x+6\right)}{\left(2e^x+7\right)^2}.$$
3. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°12

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (x-1)\left(2-e^{-x}\right).$$

1. Montrer que $f'(x) = xe^{-x} + 2\left(1-e^{-x}\right)$.
2. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.
3. Préciser la valeur de $f'(0)$ puis donner les variations de f.

Exercice n°13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = e^x\sqrt{x}.$$

1. Déterminer $f'(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+$. Dresser un tableau de variations de f.

Exercice n°14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = e^{-2x}\sqrt{5x}.$$

1. Déterminer $f'(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+$. Dresser un tableau de variations de f.

Exercice n°15

On peut modéliser le taux d'équipement en smartphones des adultes français au cours de l'année $2015+t$ par le fonction f définie pour tout réel positif t par :

$$f(t) = \frac{1}{1+e^{-0{,}5t}}.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. À partir de quelle année le taux d'équipement deviendra supérieur à 90 ? On pourra utiliser la calculatrice ou n'importe quel programme.

Exercice n°16

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que f est impaire, c'est-à-dire que pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$.

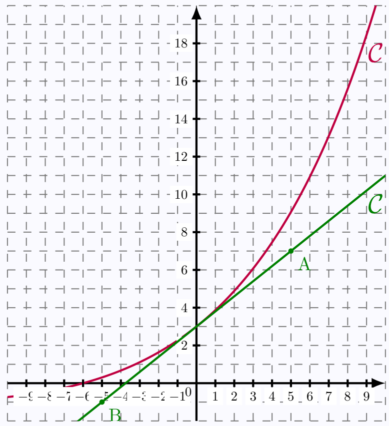
   En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Exercice n°17

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (ax+b)^{kx}$$

où a, b et k sont trois nombres réels.
La courbe représentative $\mathcal{C}$ de f est donnée ci-dessous :



$\mathcal{T}$ est la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
Les points A et B sont sur $\mathcal{T}$.

Par lecture graphique :

1. Déterminer la valeur de $f(0)$.

   En déduire la valeur de b.
2. Déterminer la solution de l'équation $f(x) = 0$.

   En déduire la valeur de a.
3. Déterminer la valeur de $f'(0)$.

   En déduire la valeur de k.

Exercice n°18

On injecte à toutes les personnes d'un groupe d'individus infectés par un virus un antidote à l'instant $x = 0$.
Le taux de personnes ayant le virus à l'instant x est donné par la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par :

$$f(x) = e^{-x}\sqrt{x+1}\,,$$

où x est exprimé en jour.

1. Déterminer les variations de f.
2. Soit l'algorithme suivant :

```
f ← 1
x ← 0
Tant que f > 0.5:
   x ← x+1/24
   f ← e^(-x)√(x+1)
Afficher x
```

   À quoi correspond la valeur affichée par cet algorithme ?
3. Cet algorithme affiche la valeur : 1,08333.

   Indiquer au bout de combien d'heures le taux de malades est inférieur à 50.
4. À l'aide d'un tableur ou de votre calculatrice, déterminer au bout de combien de jours et d'heures ce taux sera strictement inférieur à 10.